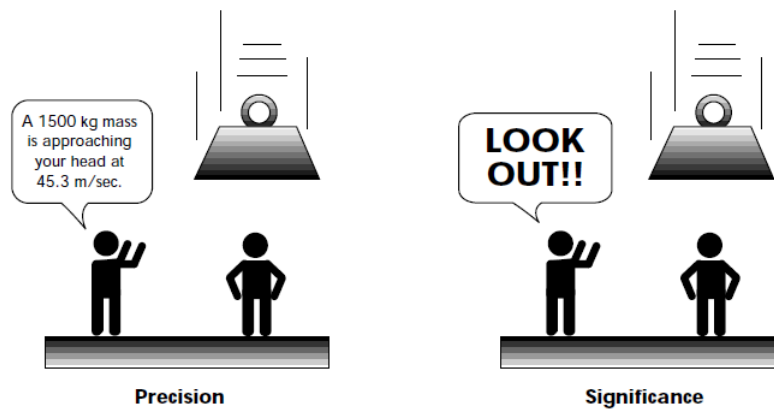


CogMaster

Mémoire de FCS2 - Raisonnement

La Logique Floue : entre raisonnement humain et intelligence artificielle



Franck Deroncourt
franck.deroncourt@gmail.com

Superviseur : Jean Baratgin
Professeur : Emmanuel Sander

Paris, Janvier 2011

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
1 L'univers flou	1
1.1 Le problème	1
1.2 La logique floue	2
1.3 Définitions	3
1.3.1 Les sous-ensembles flous	3
1.3.2 Les variables linguistiques	6
1.3.3 Les opérateurs flous	7
1.3.4 Le raisonnement en logique floue	8
1.3.5 La défuzzification	11
1.3.6 Conclusions	12
2 Le raisonnement humain	15
2.1 Le problème	15
2.2 Les probabilités non additives	16
2.2.1 Sous-additivité	16
2.2.2 Sur-additivité	17
2.2.3 Logique floue et non additivité	18
2.3 Les paradoxes cognitifs de la logique classique	20
2.3.1 Paradoxes sorites	20
2.3.2 Paradoxe de l'implication	21
2.3.3 Paradoxe de Hempel	21
2.3.4 Tâche de sélection de Wason	22
2.4 Le langage naturel	23
2.5 Conclusions	25
3 Expériences	27

3.1	Objectifs	27
3.2	Système d'aide à la décision pour anesthésistes	28
3.3	Expérience de notations de jeux vidéo	33
3.3.1	Présentation	33
3.3.2	Protocole	33
3.3.3	Résultats	33
3.3.4	Systèmes neuro-fuzzy	35
3.3.5	Comparaison avec l'expérience précédente	38
3.4	Conclusions	40
4	Conclusion	41
	Bibliographie	44
A	Expérience avec les anesthésistes	47
B	Expérience de notation	48

Table des figures

1.1	Fonction d'appartenance caractérisant le sous-ensemble 'bon' de la qualité du service	3
1.2	Représentation graphique d'un ensemble classique et d'un ensemble flou	4
1.3	Comparaison entre fonction caractéristique d'un ensemble classique et fonction d'appartenance d'un ensemble flou	5
1.4	Comparaison entre fonction caractéristique d'un ensemble classique et fonction d'appartenance d'un ensemble flou	6
1.5	Variable linguistique 'qualité du service'	6
1.6	Variable linguistique 'qualité de la nourriture'	7
1.7	Variable linguistique 'montant du pourboire'	7
1.8	Exemple d'implication floue	9
1.9	Exemple d'implication floue avec conjonction OU traduite par un MAX	10
1.10	Exemple d'implication floue en utilisant la matrice des décisions . . .	10
1.11	Défuzzification avec la méthode moyenne des maxima (MM)	11
1.12	Défuzzification avec la méthode centre de gravité (COG)	12
1.13	Aperçu synoptique d'un système flou	13
1.14	Ensemble des décisions d'un système flou	13
1.15	Ensemble des décisions d'un système se basant sur la logique classique	14
2.1	Variable point de congélation de l'alcool	18
2.2	Variable point de congélation de l'essence	18
2.3	Variable point de congélation de l'essence plus grand que alcool	19
2.4	Sur-additivité obtenue par logique floue	20
2.5	Effet des modificateurs	24
2.6	Fonctions d'appartenance de modificateurs	24
2.7	Fonctions d'appartenance de quantificateurs	25
2.8	Fonctions d'appartenance de qualificateurs	25
3.1	Vue d'ensemble du système d'inférences	28
3.2	Ensembles flous de la variable SAP	29

3.3	Ensembles flous de la variable HPR	29
3.4	Ensembles flous de la variable AO	29
3.5	Matrice des décisions	30
3.6	Exemple d'inférence	30
3.7	Comparaison décisions d'un système flou et d'un humain	31
3.8	Surface générée à partir des notes du sujet 1 par rapport aux 2 critères	34
3.9	Surface générée à partir des notes de tous les sujets par rapport aux 2 critères	34
3.10	Exemple d'un réseau de neurones feedforward	35
3.11	Structure d'un système neuro-fuzzy	36
3.12	Courbe d'apprentissage du système neuro-fuzzy	37
3.13	Surface de décision du système neuro-fuzzy	37
3.14	Surface de décision du système neuro-fuzzy	38
3.15	Surface de décision du système neuro-fuzzy	39
3.16	Surface de décision d'un système neuro-fuzzy ayant sur-appris	40
4.1	Nombre de publications par année indexées dans MEDLINE utilisant la logique floue. Source : [Torres A., 2005]	42
A.1	Matrice des corrélations entre décisions de l'anesthésiste et de décision du système flou	47
B.1	Notes globales du sujet 1 par rapport aux 2 critères	50
B.2	Surface générée à partir des notes globales du sujet 1 par rapport aux 2 critères	50
B.3	Notes globales du sujet 2 par rapport aux 2 critères	51
B.4	Surface générée à partir des notes globales du sujet 2 par rapport aux 2 critères	51

Chapitre 1

L'univers flou

As complexity rises, precise statements lose meaning and meaningful statements lose precision. Albert Einstein.

1.1 Le problème

Les connaissances dont disposent les humains sur le monde ne sont presque jamais parfaites. Ces imperfections peuvent être distinguées en deux classes :

- **Imprécisions** pour désigner les connaissances qui ne sont pas perçues ou définies nettement. Par exemple, au lieu de dire qu'une personne mesure 2 mètres et 3 centimètres, nous disons usuellement que cette personne est très grande.
- **Incertitudes** pour désigner les connaissances dont la validité est sujette à question. Par exemple, si nous savons qu'une personne s'est cognée la tête sur un plafond, nous devinons qu'il est probable qu'elle soit très grande.

En fait, ces imperfections émanent de la nature même de l'homme et du monde : aucun de nos sens et instruments d'observation ne nous permettent une précision infinie et le monde repose sur le principe de continuité, au sens mathématique, par opposition aux valeurs discrètes. C'est une des raisons pour lesquelles il est si difficile d'établir un système d'unité de mesure, et que toute quantité n'est qu'approximative. De même, rare sont les situations où nous pouvons dire être totalement sûr que telle proposition est vraie sans que nous devons poser au préalable un ensemble d'hypothèses.

Ainsi, les connaissances sur lesquelles se base le raisonnement humain sont presque toujours entachées d'une quantité d'incertitudes et d'imprécisions. Nous ne parlerons

pas ici du raisonnement scientifique, dont l'objectif est justement de se débarrasser de toute imperfection, mais de tous les autres raisonnements que nous faisons tous les jours, sans cesse, sur les choses, les personnes et les pensées nous environnant. Ces raisonnements vont de la conduite d'une voiture au traitement préconisé par le médecin à son patient, en passant par la décision d'acheter une baguette de pain pour demain matin.

Etonnamment, et fort heureusement, malgré ce flou artistique qui caractérise notre perception du monde, la qualité des raisonnements humains est remarquable. Que ce soit dans des situations simples ou complexes, les décisions prises sont en général très bonnes par rapport au manque de précision et à l'incertitude des données du problème.

L'être humain, dans le cadre de la théorie des systèmes, est considéré comme un système en tant que tel [Mélès, 1971], dont les raisonnements supportent très bien des données imparfaites. Ses performances impressionnantes étant donné la complexité et la diversité des situations rencontrées intéressèrent certains chercheurs en théorie des systèmes dans les années 1960, en particulier Lofti Zadeh, futur fondateur de la logique floue.

1.2 La logique floue

La logique floue est une extension de la logique booléenne par Lofti Zadeh en 1965 en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. En introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, permettant ainsi à une condition d'être dans un autre état que vrai ou faux, la logique floue confère une flexibilité très appréciable aux raisonnements qui l'utilisent, ce qui rend possible la prise en compte des imprécisions et des incertitudes.

Un des intérêts de la logique floue pour formaliser le raisonnement humain est que les règles sont énoncées en langage naturel. Voici par exemple quelques règles de conduite qu'un conducteur suit, en supposant qu'il tienne à son permis :

Si le feu est rouge...	si ma vitesse est élevée...	et si le feu est proche...	alors je freine fort.
Si le feu est rouge...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est loin...	alors je maintiens ma vitesse.
Si le feu est orange...	si ma vitesse est moyenne...	et si le feu est loin...	alors je freine doucement.
Si le feu est vert...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est proche...	alors j'accélère.

Intuitivement, il semble donc que les variables d'entrée à l'instar de cet exemple sont appréciées par le cerveau de manière approximative, correspondant ainsi au degré de vérification d'une condition de la logique floue.

1.3 Définitions

Afin d'exemplifier chacune des définitions, nous allons concevoir au fil de cette section un système d'inférence flou concret dont l'objectif est de décider du pourboire à donner à la fin d'un repas au restaurant en fonction de la qualité du service ainsi que de la qualité de la nourriture.

1.3.1 Les sous-ensembles flous

La logique floue repose sur la théorie des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques [Zadeh, 1965]. Par abus de langage, suivant les us de la littérature, nous utiliserons indifféremment les termes sous-ensembles flous et ensembles flous. Les ensembles classiques sont également appelés ensemble nets, par opposition à flou, et de même la logique classique est également appelée logique booléenne ou binaire.

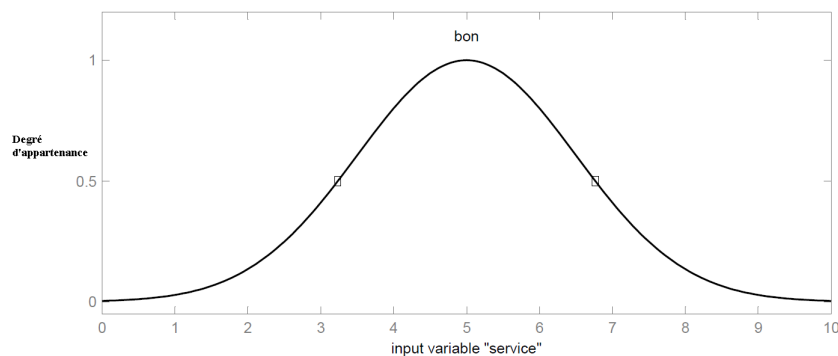


FIGURE 1.1: Fonction d'appartenance caractérisant le sous-ensemble 'bon' de la qualité du service

La figure 1.1 montre la fonction d'appartenance choisie pour caractériser le sous-ensemble 'bon' de la qualité du service.

Définition 1.

*Soit X un ensemble. Un sous-ensemble flou A de X est caractérisé par une **fonction d'appartenance**. $f^a : X \rightarrow [0, 1]$.*

Note : Cette fonction d'appartenance est l'équivalent de la fonction caractéristique d'un ensemble classique.

Dans notre exemple du pourboire, il nous faudra redéfinir des fonctions d'appartenance pour chaque sous-ensemble flou de chacune de nos trois variables :

- Input 1 : qualité du service. Sous-ensembles : mauvais, bon et excellent.
- Input 2 : qualité de la nourriture. Sous-ensembles : exécrable et délicieux.
- Output : montant du pourboire. Sous-ensembles : faible, moyen et élevé.

La forme de la fonction d'appartenance est choisie arbitrairement en suivant les conseils de l'expert ou en faisant des études statistiques : formes sigmoïde, tangente hyperbolique, exponentielle, gaussienne ou de toute autre nature sont utilisables.

La figure 1.2 montre graphiquement la différence entre un ensemble classique et l'ensemble flou correspondant à une nourriture délicieuse.

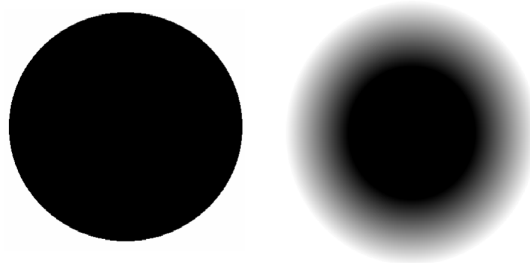


FIGURE 1.2: Représentation graphique d'un ensemble classique et d'un ensemble flou

La figure 1.3 compare les deux fonctions d'appartenance correspondant aux ensembles précédents.

Pour pouvoir définir les caractéristiques des ensembles flous, nous redéfinissons et étendons les caractéristiques usuelles des ensembles classiques.

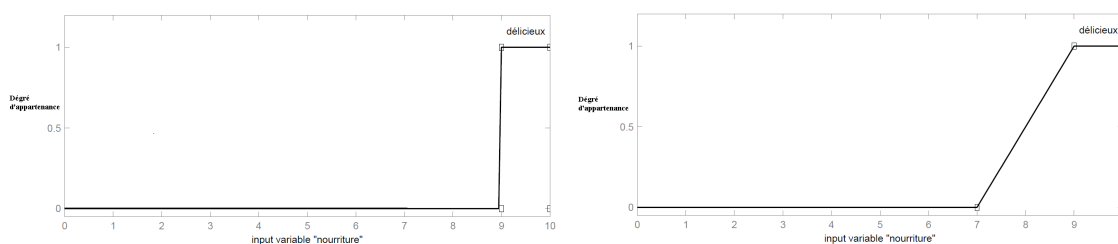


FIGURE 1.3: Comparaison entre fonction caractéristique d'un ensemble classique et fonction d'appartenance d'un ensemble flou

Soit X un ensemble, A un sous-ensemble flou de X et μ_A la fonction d'appartenance le caractérisant.

Définition 2.

La *hauteur* de A , notée $h(A)$, correspond à la borne supérieure de l'ensemble d'arrivée de sa fonction d'appartenance : $h(A) = \sup\{\mu_A(x) \mid x \in X\}$.

Définition 3.

A est dit **normalisé** si et seulement si $h(A) = 1$. En pratique, il est extrêmement rare de travailler sur des ensembles flous non normalisés.

Définition 4.

Le **support** de A est l'ensemble des éléments de X appartenant au moins un peu à A . Autrement dit, c'est l'ensemble $\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Définition 5.

Le **noyau** de A est l'ensemble des éléments de X appartenant totalement à A . Autrement dit, c'est l'ensemble $\text{noy}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$. Par construction, $\text{noy}(A) \subseteq \text{supp}(A)$.

Définition 6.

Une **α -coupe** de A est le sous-ensemble classique des éléments ayant un degré d'appartenance supérieur ou égal à α : $\alpha\text{-coupe}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Une autre fonction d'appartenance pour un pourboire moyen sur lequel nous avons fait figurer les propriétés précédentes est présentée sur la figure 1.4.

Nous remarquons que si A était un ensemble classique, nous aurions simplement $\text{supp}(A) = \text{noy}(A)$ et $h(A) = 1$ (ou $h(A) = 0$ si $A = \emptyset$). Nos définitions permettent donc bien de retrouver les propriétés usuelles des ensembles classiques. Nous ne parlerons pas de la cardinalité car nous n'utiliserons pas cette notion dans la suite de ce mémoire.

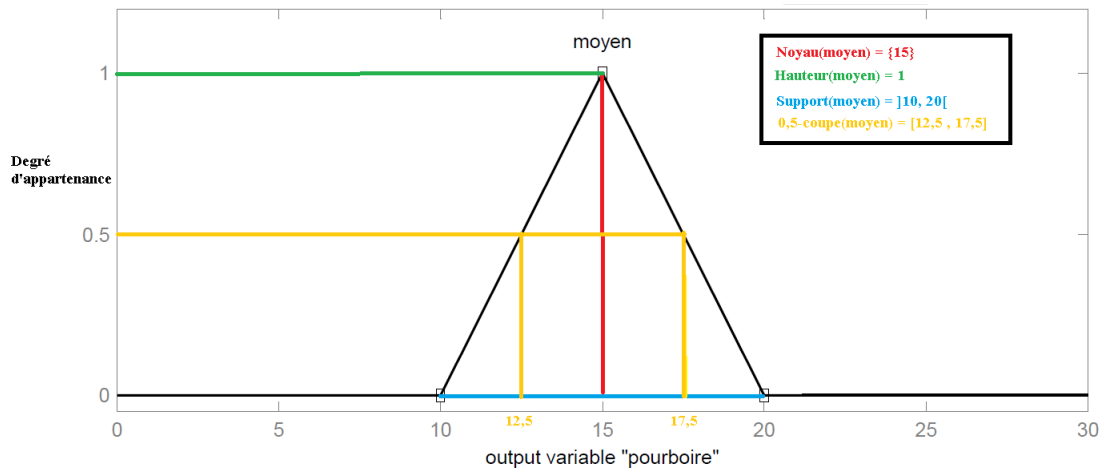


FIGURE 1.4: Comparaison entre fonction caractéristique d'un ensemble classique et fonction d'appartenance d'un ensemble flou

1.3.2 Les variables linguistiques

Le concept de fonction d'appartenance vu précédemment nous permettra de définir des systèmes flous en langage naturel, la fonction d'appartenance faisant le lien entre logique floue et variable linguistique que nous allons définir à présent.

Définition 7.

Soit V une variable (qualité du service, montant du pourboire, etc.), X la plage de valeurs de la variable et T_V un ensemble fini ou infini de sous-ensembles flous. Une **variable linguistique** correspond au triplet (V, X, T_V) .

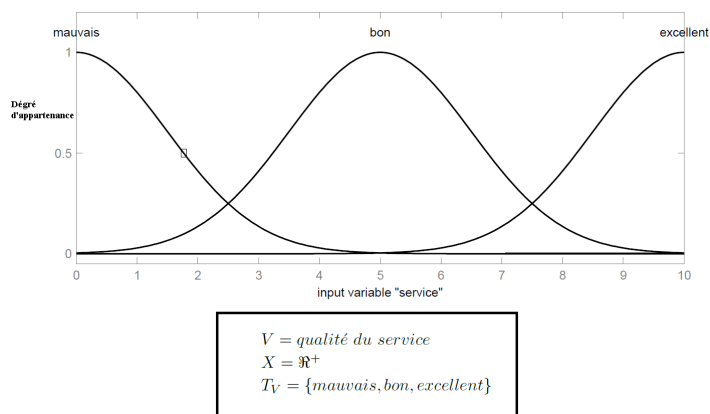


FIGURE 1.5: Variable linguistique 'qualité du service'

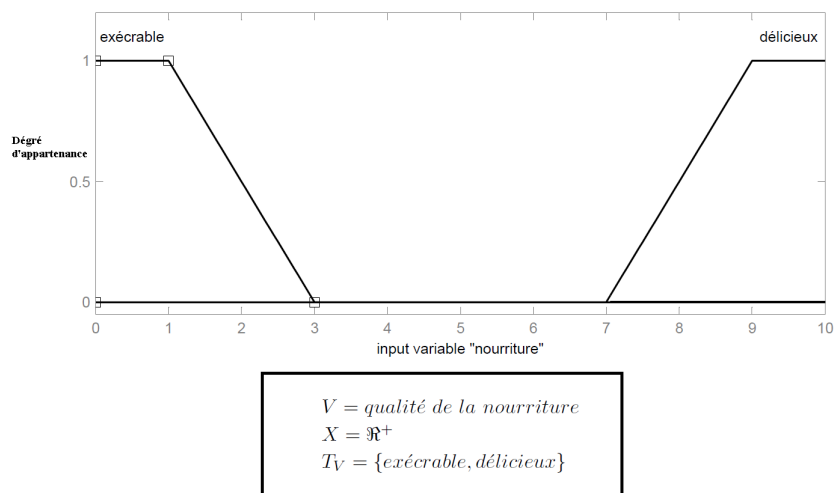


FIGURE 1.6: Variable linguistique 'qualité de la nourriture'

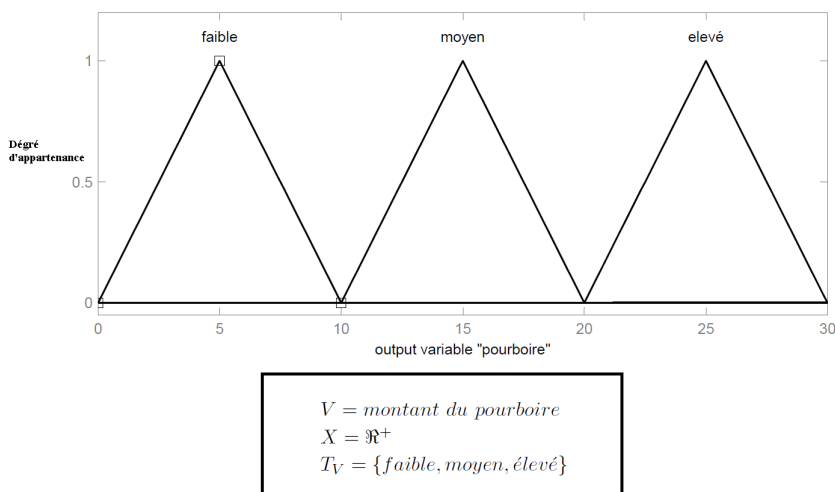


FIGURE 1.7: Variable linguistique 'montant du pourboire'

1.3.3 Les opérateurs flous

Afin de pouvoir manipuler aisément les ensembles flous, nous redéfinissons les opérateurs de la théorie des ensembles classiques afin de les adapter aux fonctions d'appartenance propres à la logique floue permettant des valeurs strictement entre 0 et 1.

Contrairement aux définitions des propriétés des ensembles flous qui sont toujours les

mêmes, la définition des opérateurs sur les ensembles flous est choisie, à l'instar des fonctions d'appartenance. Voici les deux ensembles d'opérateurs pour le complément (NON), l'intersection (ET) et l'union (OU) utilisés le plus couramment :

Dénomination	Intersection ET : $\mu_{A \cap B}(x)$	Réunion OU : $\mu_{A \cup B}(x)$	Complément NON : $\mu_{\bar{A}}(x)$
Opérateurs de Zadeh MIN/MAX	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$1 - \mu_A(x)$
Probabiliste PROD/PROBOR	$\mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$1 - \mu_A(x)$

Avec les définitions usuelles des opérateurs flous, nous nous retrouvons toujours les propriétés de commutativité, distributivité et associativité des opérateurs classiques. Cependant, relevons deux exceptions notables :

- En logique floue, le principe du tiers exclu est contredit : $A \cup \bar{A} \neq X$, autrement dit $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1$.
- En logique floue, un élément peut appartenir à A et non A en même temps : $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$, autrement dit $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq 0$. Notons que ces éléments correspondent à l'ensemble $\text{supp}(A) - \text{noy}(A)$.

1.3.4 Le raisonnement en logique floue

En logique classique, les raisonnements sont de la forme :

$$\begin{cases} \text{Si } p \text{ alors } q \\ p \text{ vrai alors } q \text{ vrai} \end{cases}$$

En logique floue, le raisonnement flou, également appelé raisonnement approximatif, se base sur des **règles floues** qui sont exprimées en langage naturel en utilisant les variables linguistiques dont nous avons donné la définition précédemment. Une règle floue aura cette forme :

Si $x \in A$ et $y \in B$ alors $z \in C$, avec A, B et C des ensembles flous.

Par exemple :

'Si (la qualité de la nourriture est délicieuse), alors (le pourboire sera élevé).'

La variable 'pourboire' appartient à l'ensemble flou 'élevé' à un degré qui dépend du degré de validité de la prémisse, autrement dit du degré d'appartenance de la variable 'qualité de la nourriture' à l'ensemble flou 'délicieux'. L'idée sous-jacente est que plus les propositions en prémisse sont vérifiées, plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée. Pour connaître le degré de vérité de la proposition floue 'le pourboire sera élevé', nous devons définir l'implication floue.

À l'instar des autres opérateurs flous, il n'existe pas de définition unique de l'application floue : le concepteur du système flou devra choisir parmi le large choix d'implication floue déjà définies, ou bien la définir à la main. Voici les deux définitions de l'implication floue les plus couramment utilisées :

Nom	Valeur de vérité
Mamdani	$\min(f_a(x), f_b(x))$
Larsen	$f_a(x) \times f_b(x)$

Fait notable, ces deux implications ne généralisent à l'implication classique. Il existe d'autres définitions d'implication floue la généralisant, mais elles sont moins utilisées.

Si nous choisissons l'implication de Mamdani, voici ce que nous obtenons pour la règle floue 'Si (la qualité de la nourriture est délicieuse), alors (le pourboire sera élevé)' lorsque la qualité de la nourriture est notée 8,31 sur 10 :



FIGURE 1.8: Exemple d'implication floue

Le résultat de l'application d'une règle floue dépend donc de trois facteurs :

1. la définition d'implication floue choisie ;
2. la définition de la fonction d'appartenance de l'ensemble flou de la proposition située en conclusion de la règle floue ;
3. le degré de validité des propositions situées en prémisse.

Comme nous avons définies les opérateurs flous ET, OU et NON, la prémisse d'une règle floue peuvent très bien être formée d'une conjonction de propositions floues. L'ensemble des règles d'un système flou est appelé la **matrice des décisions**. Voici celui de notre exemple du pourboire :

Si le service est mauvais ou la nourriture est exécration	alors le pourboire est faible
Si le service est bon	alors le pourboire est moyen
Si le service est excellent ou la nourriture est délicieuse	alors le pourboire est élevé

Si nous choisissons l'implication de Mamdani ainsi que la traduction du OU par MAX, voici ce que nous obtenons pour la règle floue 'Si (le service est excellent ou la nourriture est délicieuse), alors (le pourboire sera élevé)' lorsque la qualité du service est notée 7,83 sur 10 et la qualité de la nourriture 7,32 sur 10 :

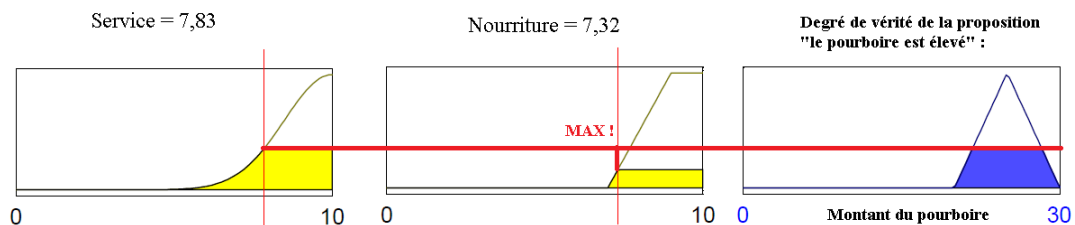


FIGURE 1.9: Exemple d'implication floue avec conjonction OU traduite par un MAX

Nous allons maintenant appliquer l'ensemble des 3 règles de notre matrice des décisions. Cependant, nous allons obtenir 3 ensembles flous pour le pourboire : nous les agrégerons par l'opérateur MAX qui est presque toujours utilisé pour l'agrégation.

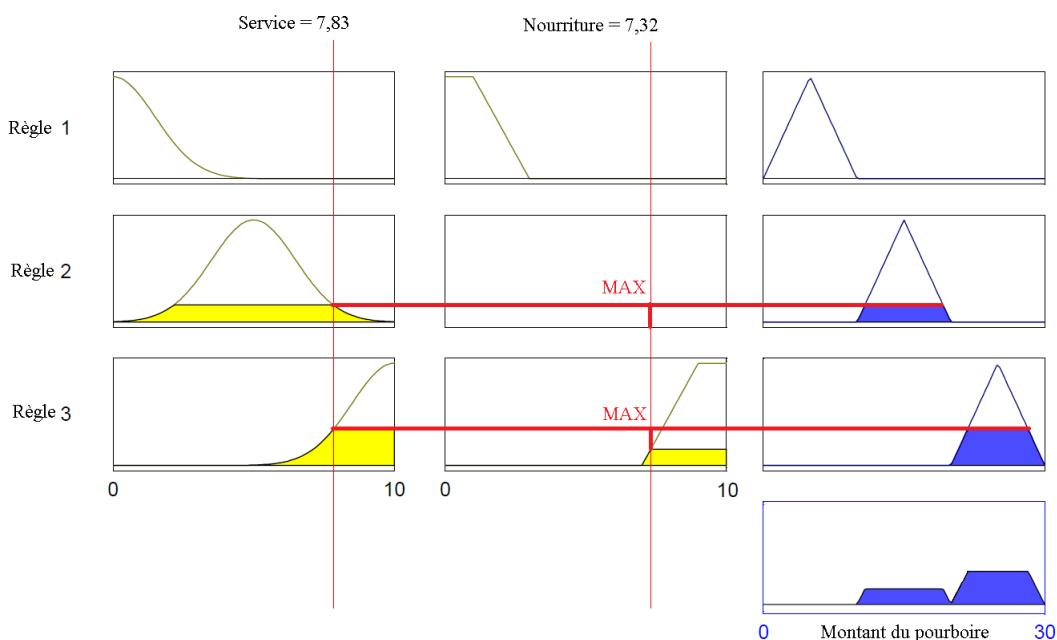


FIGURE 1.10: Exemple d'implication floue en utilisant la matrice des décisions

Comme nous le voyons, il ne nous reste plus qu'à prendre la décision finale, à savoir quel pourboire nous allons réellement donner sachant que la qualité du service est notée 7,83 sur 10 et la qualité de la nourriture 7,32 sur 10. Cette étape finale, qui permet de passer de l'ensemble flou issu de l'agrégation des conclusions à une décision unique, s'appelle la **défuzzification**.

1.3.5 La défuzzification

Comme pour tous les opérateurs flous, le concepteur du système flou doit choisir parmi plusieurs définitions possibles de défuzzifications. Une liste détaillée peut être consultée dans [Leekwijck and Kerre, 1999]. Nous allons présenter brièvement les deux principales méthodes de défuzzification : la méthode moyenne des maxima (MM) et la méthode du centre de gravité (COG).

La défuzzification MM définit la sortie (décision du montant du pourboire) comme étant la moyenne des abscisses des maxima de l'ensemble flou issu de l'agrégation des conclusions.

$$Décision = \frac{\int_S y \cdot dy}{\int_S dy}$$

où $S = \{y_m \in R, \mu(y_m) = SUP_{y \in R}(\mu(y))\}$

et R est l'ensemble flou issu de l'agrégation des conclusions.

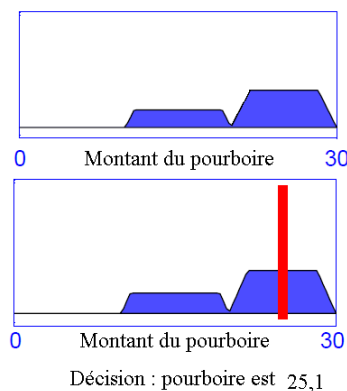


FIGURE 1.11: Défuzzification avec la méthode moyenne des maxima (MM)

La défuzzification COG est plus couramment utilisée. Elle définit la sortie comme correspondant à l'abscisse du centre de gravité de la surface de la fonction d'appartenance caractérisant l'ensemble flou issu de l'agrégation des conclusions.

$$D\acute{e}cision = \frac{\int_S y \cdot \mu(u) \cdot dy}{\int_S \mu(u) \cdot dy}$$

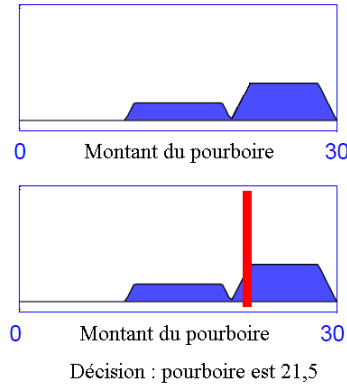


FIGURE 1.12: D\acute{e}fuzzification avec la m\acute{e}thode centre de gravit\acute{e} (COG)

Cette d\acute{e}finition permet d'\acute{e}viter les discontinuit\acute{e}s qui pouvaient appara\^{\i}tre dans la d\acute{e}fuzzification MM, mais est plus complexe et demande des calculs plus importants. Certains travaux tel [Madau D., 1996] cherchent \`{a} am\acute{e}liorer les performances en cherchant d'autres m\acute{e}thode aussi efficace mais avec une complexit\acute{e} algorithmique moindre. Comme nous le voyons sur les 2 figures montrant les m\acute{e}thodes de d\acute{e}fuzzification MM et COG appliqu\acute{e}s \`{a} notre exemple, le choix de cette m\acute{e}thode a un effet important sur la d\acute{e}cision finale.

1.3.6 Conclusions

Au cours des d\acute{e}finitions, nous avons vu que le concepteur d'un syst\`{e}me flou doit faire un nombre de choix importants. Ces choix se basent essentiellement sur les conseils de l'expert ou sur l'analyse statistique des donn\acute{e}es pass\acute{e}es, en particulier pour d\acute{e}finir les fonctions d'appartenance et la ma\^{\i}trise des d\acute{e}cisions.

Voici un aper\`{c}u synoptique d'un syst\`{e}me flou :

Dans notre exemple,

- l'**input** est 'la qualit\acute{e} du service est not\acute{e}e 7,83 sur 10 et la qualit\acute{e} de la nourriture 7,32 sur 10' ;
- le **fuzzifier** correspond aux 3 variables linguistiques 'qualit\acute{e} du service', 'qualit\acute{e} de la nourriture' et 'montant du pourboire' ;
- le **moteur d'inf\acute{e}rence** est constitu\acute{e} du choix des op\acute{e}rateurs flous ;

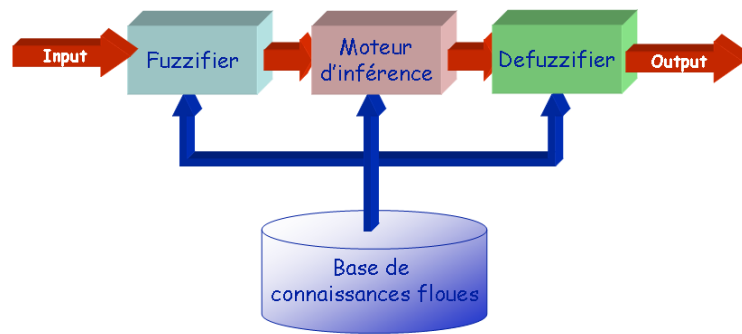


FIGURE 1.13: Aperçu synoptique d'un système flou

- la **base de connaissances** floues est l'ensemble des règles floues ;
- le **defuzzifier** est la partie où entrent en jeu la méthode de défuzzification ;
- l'**output** correspond à la décision finale : 'le montant du pourboire est 25,1'.

Il est intéressant de voir l'ensemble des décisions en fonction de chacune des variables avec notre système d'inférence flou par rapport au type d'ensemble de décisions que nous obtiendrions en utilisant la logique classique :

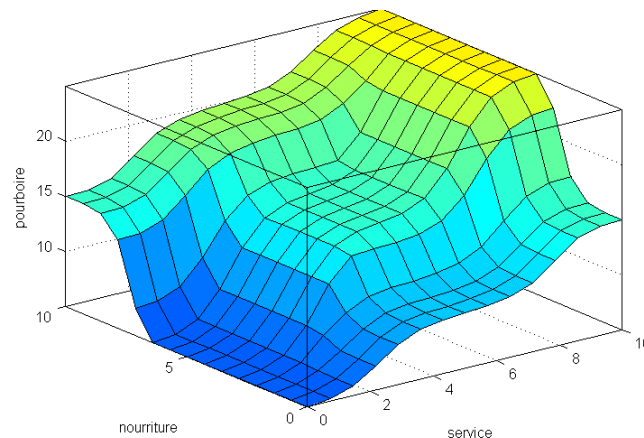


FIGURE 1.14: Ensemble des décisions d'un système flou

Ainsi, la logique floue permet de mettre en place des systèmes d'inférence dont les décisions sont sans discontinuités, flexibles et non linéaires, plus proche du comportement humain que ne l'est la logique classique. De plus, les règles de la matrice des décisions sont exprimées en langage naturel. Nous allons voir en seconde partie si le raisonnement humain dans le cadre de prise de décision comme dans l'exemple du

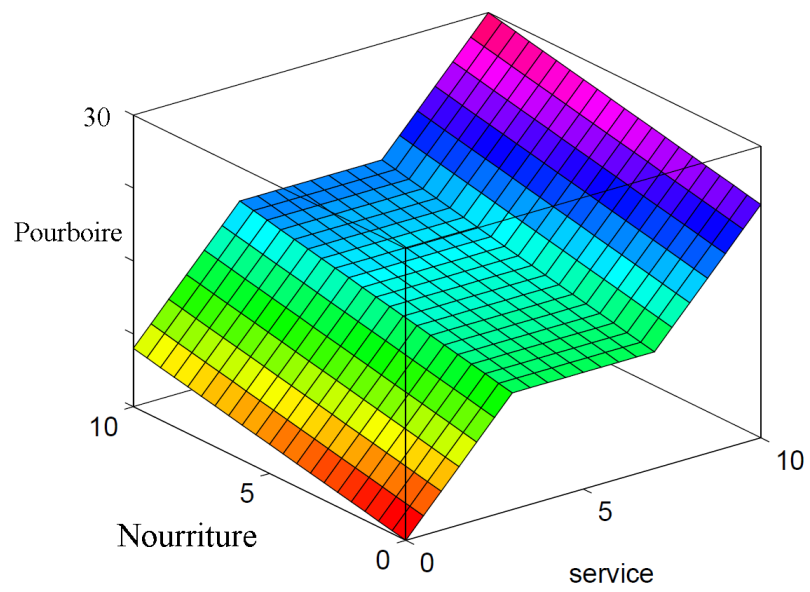


FIGURE 1.15: Ensemble des décisions d'un système se basant sur la logique classique

pourboire a des résultats similaires aux inférences émanant de systèmes flous.

Chapitre 2

Le raisonnement humain

L'être humain va au-delà de l'information immédiatement disponible.
Jerome Bruner.

2.1 Le problème

La **raison** est la faculté de penser, en tant qu'elle permet à l'homme de bien juger et d'appliquer ce jugement à l'action. C'est la capacité délaborer, à partir de connaissances primitives sur l'état réel ou hypothétique de son environnement (**prémises**), d'autres connaissances ou croyances sur l'état de cet environnement (**conclusions**), par des activités totalement intériorisées. Le **raisonnement** désigne l'activité de la raison, autrement dit la méthode du passage des prémisses à la conclusion.

Le 20^{ème} siècle fut un tournant majeur pour la compréhension du raisonnement humain : des hypothèses jusqu'alors fermement enracinées dans la pensée commune ont été totalement remises en question, et de nouvelles théories ont vu le jour afin de combler les lacunes de ces premières.

Néanmoins, beaucoup d'observations expérimentales sur le raisonnement humain ne restent que partiellement expliquées : le but de ce chapitre est de voir en quelle mesure la logique floue peut représenter un technique novatrice pour la compréhension du raisonnement humain.

À cette fin, nous allons nous pencher sur plusieurs problèmes qui motivèrent l'élaboration de nouvelles théories du raisonnement humain à partir du 20^{ème} siècle et se demander si la logique floue peut y apporter une réponse alternative.

2.2 Les probabilités non additives

Le début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654 et fut axiomatisée par Kolmogorov en 1933 [Shafer G., 2005]. Une des conséquences directes de ces axiomes est que $P(\Omega \setminus E) = 1 - P(E)$, où Ω est l'univers, et E un événement quelconque.

Les probabilités peuvent être interprétées de deux façons :

- Objectivement : les probabilités sont des valeurs accordées à des événements dans le cadre de jeux de hasard.
- Subjectivement : les probabilités correspondent en termes numériques aux états de connaissances d'un humain sur un événement ou état du monde.

Le propos de ce texte étant d'étudier le raisonnement humain, nous ne garderons que la seconde interprétation. Dans cette perspective, la valeur probabilité est propre à chacun.

Or, il se trouve que expérimentalement, nous pouvons montrer que les probabilités utilisées et générées par le raisonnement humain ne respectent pas les axiomes de Kolmogorov, car violent la conséquence $P(\Omega \setminus E) = 1 - P(E)$ précédemment vue.

2.2.1 Sous-additivité

[Redelmeier DA, 1995] a fait l'expérience suivante : le cas d'un patient admis dans un hôpital a été résumé à des médecins de Stanford, et il fut demandé à ces derniers d'estimer la probabilité de chacun des événements suivants :

- Le patient meurt pendant son séjour à l'hôpital ;
- Le patient sort vivant de l'hôpital mais meurt dans moins d'un an ;
- Le patient mourra quelque part entre 1 et 10 ans ;
- Le patient suivra au moins de 10 ans encore

Comme ces quatre événements forment une partition de l'univers, car quel que soit la durée de vie du patient, 1 et 1 seul de ces événements sera vrai, nous nous attendrions à ce que la somme des probabilités soit égale à 1. Or, expérimentalement, nous trouvons que la moyenne de la somme de ces quatre probabilités est égale à 1.64 (intervalle de confiance à 95% : [1.34, 1.94]). Ce résultat montrant que la somme des probabilités des événements d'une partition de l'univers est supérieure à 1 est appelé **sous-additivité** du jugement des probabilités.

Le terme de sous-additivité vient des mathématiques, qui définissent une fonction

sous-additive ainsi :

Définition 8.

Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite **sous-additive** ssi A est un ensemble de définition clos pour l'addition, B est un ensemble d'arrivée partiellement ordonné clos pour l'addition et $\forall x, y \in A, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

2.2.2 Sur-additivité

A contrario, certains articles tels [Cohen et al., 1956], [Macchi, 1999] et [Boven and Epley, 2003] montrent que dans certaines conditions, le jugement des probabilités peut refléter une **sur-additivité**, autrement dit que la somme des probabilités des événements d'une partition de l'univers est inférieure à 1.

Définition 9.

Une fonction f est dite **sur-additive** ssi elle n'est pas sous-additive.

Par exemple, [Macchi, 1999] a demandé à des étudiants d'évaluer la probabilité des deux événements suivants :

- Le point de congélation de l'essence n'est pas égal à celui de l'alcool. Quelle est la probabilité pour que le point de congélation de l'essence soit plus grande que celui de l'alcool ?
- Le point de congélation de l'essence n'est pas égal à celui de l'alcool. Quelle est la probabilité pour que le point de congélation de l'alcool soit plus grande que celui de l'essence ?

L'analyse des résultats montre qu'en moyenne la somme de ces deux probabilités est d'environ 0.9, au lieu de 1 comme nous aurions pu nous y attendre, le premier événement étant le complémentaire du second. [Macchi, 1999] étudie les différents facteurs pouvant accentuer ou diminuer cette somme. Dans les grandes lignes, nous constatons que plus le sujet est sûr de son jugement, plus il aura tendance à avoir des probabilités sous-additives, et à l'inverse moins il est sûr de ce jugement, plus il aura tendance à avoir des probabilités sur-additives. La **support theory** [Tversky and Koehler, 1994] permet de prévoir mieux en détails le type de non additivité et donne une explication unifiée des résultats expérimentaux par relatés précédemment.

Par conséquent, le raisonnement humain fait fi des axiomes de Kolmogorov, qui posent les fondements de la théorie des probabilités. Celle-ci ne permet donc pas de modéliser l'ensemble des raisonnements humains.

2.2.3 Logique floue et non additivité

En logique floue, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, le principe du tiers exclu est contredit ($A \cup \bar{A} \neq X$, i.e. $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq 1$) car la définition de l'opérateur OU est classiquement $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ (Zadeh min/max) ou $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$ (PROD/PROBOR). Le problème de la non additivité ne se pose plus. Selon les fonctions d'appartenance choisies, nous pouvons avoir ce que nous voulons : sur-additivité, sous-additivités ou somme égale à 1.

Modélisons notre dernier exemple sur les points de congélation issu de [Macchi, 1999] dans un système flou :

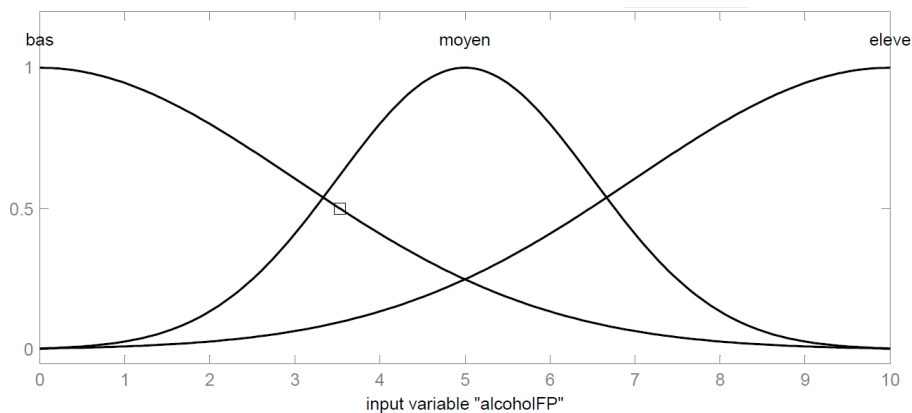


FIGURE 2.1: Variable point de congélation de l'alcool

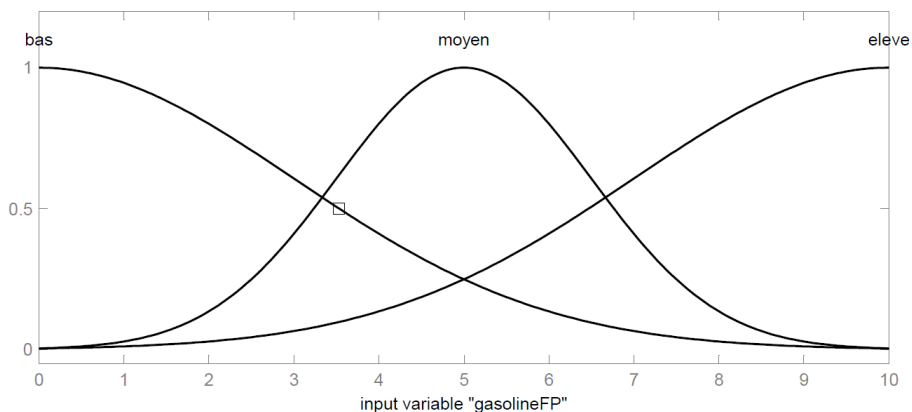


FIGURE 2.2: Variable point de congélation de l'essence

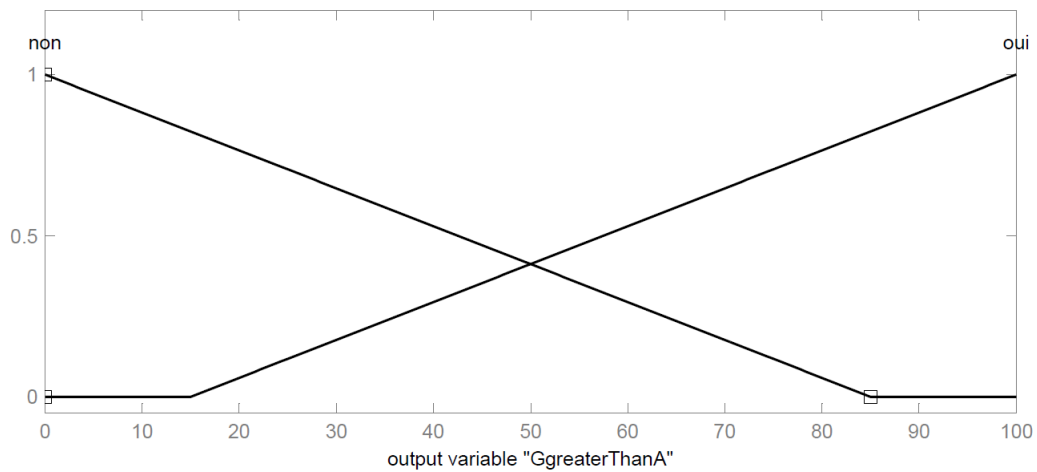


FIGURE 2.3: Variable point de congélation de l'essence plus grand que alcool

Voici les choix d'opérateurs flous que nous faisons (choix classique) :

Opérateur	Choix
OU	max
ET	min
Implication	Mamdani
Agrégation	max
Défuzzication	COG

La matrice de décisions sera la suivante :

Si PC alcool est bas	et si PC essence est moyen	alors GgreaterThanA est oui.
Si PC alcool est bas	et si PC essence est élevé	alors GgreaterThanA est oui.
Si PC alcool est moyen	et si PC essence est bas	alors GgreaterThanA est non.
Si PC alcool est moyen	et si PC essence est élevé	alors GgreaterThanA est oui.
Si PC alcool est élevé	et si PC essence est bas	alors GgreaterThanA est non.
Si PC alcool est élevé	et si PC essence est moyen	alors GgreaterThanA est non.

où :

- PC alcool signifie point de congélation de l'alcool ;
- PC essence signifie point de congélation de l'essence ;
- GgreaterThanA est oui signifie que le point de congélation de l'essence est plus élevé que le point de congélation de l'alcool ;
- GgreaterThanA est non signifie que le point de congélation de l'essence est plus bas que le point de congélation de l'alcool.

Imaginons que PC alcool est égal à 5/10 et PC essence est égal à 7,95/10 (n'étant

pas experts en congélation, nous avons choisi de mesurer les points de congélation sur une échelle de 0 à 10). Notre système flou donne alors pour valeur $G_{\text{greaterThanA}} = 66,7$. Avec cette valeur, nous pouvons retrouver les degrés d'appartenance sous-ensembles flous "oui" et "non" :

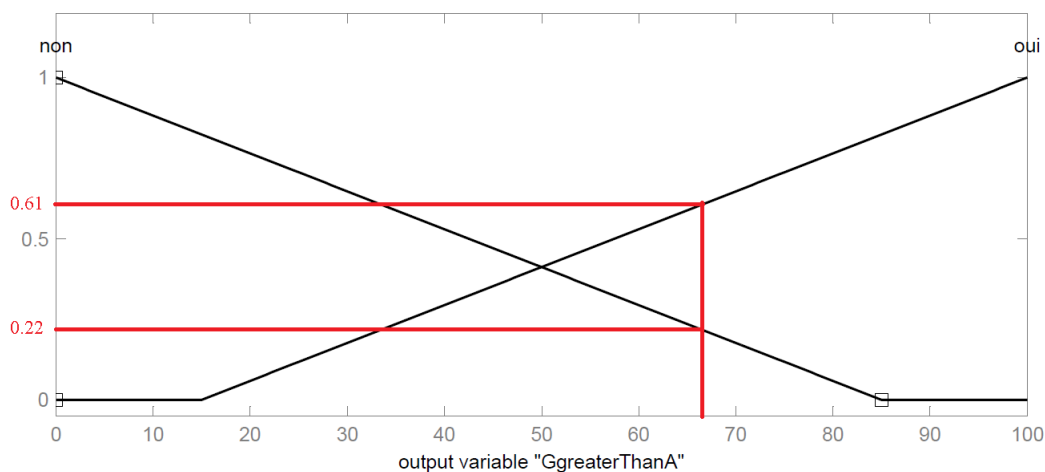


FIGURE 2.4: Sur-additivité obtenue par logique floue

Le degré d'appartenance au sous-ensemble flou "non" est $\frac{85-66,7}{85} \approx 0,22$ et le degré d'appartenance au sous-ensemble flou "oui" est $\frac{66,7-15}{85} \approx 0,61$. Nous constatons que $0,22 + 0,61 < 1$, ce qui reflète la sur-additivité trouvée expérimentalement dans [Macchi, 1999].

Plus généralement, la non-additivité qui a été montrée dans beaucoup d'études de psychologie expérimentale peut ainsi être modélisée en logique floue via le choix des variables et des fonctions d'appartenance de leurs sous-ensembles flous.

2.3 Les paradoxes cognitifs de la logique classique

La logique classique (binaire) génèrent souvent des conclusions qui diffèrent de ce que les humains font en pratique. Nous allons voir dans cette section si la logique floue permet de mieux expliquer certaines de ces différences.

2.3.1 Paradoxes sorites

Les paradoxes sorites apparaissent lorsque nous posons des questions du type "Combien de grains faut-il pour faire un tas?". La réponse est ardue car en langage courant,

aucun grain ajouté peut être identifié comme faisant la différence entre tas et non tas. Etant donné qu'un grain seul n'est pas considéré comme étant un tas, il s'en suivit que 2 grains ne forment pas un tas, pas plus que 3, etc. Néanmoins, si nous continuons à ajouter ainsi des grains, au bout un certain nombre non défini, nous obtenons pourtant un tas.

En logique classique, la proposition "T est un tas" pose donc problème, car doit être soit vraie, soit fausse. Or, nous venons de voir qu'il n'existe pas de seuil exprimable en nombre de grains au-delà duquel un non-tas et devient tas.

En logique floue, ce problème est moins important car nous pouvons définir "T est un tas" comme étant un ensemble flou : nous n'avons plus cet effet de "seuil" de la logique classique. Néanmoins, il faudra tout de même définir une fonction d'appartenance.

2.3.2 Paradoxe de l'implication

En logique classique, les implications sont du type "Si A alors B". Par définition, l'implication est toujours vraie lorsque A est faux. Ainsi, l'implication "si $1+1=3$ alors $1+1=2$ " est considérée comme étant vraie, alors que cognitivement beaucoup de personnes ne l'acceptent pas comme étant vraie. Cela est un paradoxe émanant de la définition de l'implication.

Or, en logique floue, c'est le concepteur du système flou qui choisit toutes les règles floues du système. N'ayant aucun intérêt à mettre des règles inutiles telles "si $1+1=3$ alors $1+1=2$ ", il n'y aura normalement que des règles utiles pour les besoins du système.

2.3.3 Paradoxe de Hempel

Prenons la proposition « Tous les corbeaux sont noirs » (H). Cette phrase est logiquement équivalente à « Tous les objets non-noirs sont des non-corbeaux » (H'). En effet, par la loi de contraposition, $P \rightarrow Q$ est équivalent à $\neg Q \rightarrow \neg P$.

Il en résulte que la découverte d'un corbeau noir confirme (H) et également (H'), mais aussi que la découverte d'une chose non-noire qui n'est pas un corbeau telle qu'un flamand rose ou même un parapluie gris, confirme (H') et donc (H). Cette dernière conclusion apparaît comme paradoxale.

En logique floue, les ensembles flous ainsi que la matrice des décisions sont fixés par le

concepteur du système. Néanmoins, il est possible de redéfinir ces ensembles ou règles floues par apprentissage, notamment via réseaux de neurones. Cette combinaison entre logique floue et réseaux de neurone est appelée **neuro-fuzzy** [Jangi, 1992]. Nous n'entrerons pas dans les détails ici mais le ferons dans la partie 3.3.4.

2.3.4 Tâche de sélection de Wason

La tâche de sélection de Wason est une expérience qui permet de tester la maîtrise du modus ponens et du modus tollens chez les sujets [P. C. Wason, 1966]. Voici ce qui est proposé aux sujets tel que décrit dans l'expérience originale : « Quatre cartes comportant un chiffre sur une face et une lettre sur l'autre, sont disposées à plat sur une table. Une seule face de chaque carte est visible. Les faces visibles sont les suivantes : D, 7, 5, K. Quelle(s) carte(s) devez-vous retourner pour déterminer la ou les carte(s) qui ne respecte(nt) pas la règle suivante : Si une carte a un D sur une face, alors elle porte un 5 sur l'autre face. Il ne faut pas retourner de carte inutilement, ni oublier d'en retourner une. »

Environ 80% des sujets se trompent dans leur réponse. L'erreur la plus courante, à savoir retourner la carte 5, et oublier la carte 7, révèle deux biais cognitifs :

- un biais de vérification, qui consiste à chercher davantage une vérification qu'une réfutation de la règle ;
- un biais d'appariement, qui consiste à se focaliser sur les items cités dans l'énoncé.

En terme logique, l'oubli de la carte 7 montre une mauvaise maîtrise du modus tollens. Le choix 5 correspond au sophisme de l'affirmation du conséquent, c'est-à-dire à confondre une simple relation d'implication avec une relation d'équivalence logique.

La logique floue ne permet pas de prévoir le sophisme de l'affirmation du conséquent, mais peut néanmoins le simuler sans aucun problème théorique : la confusion entre implication et équivalence logique ne peut pas avoir lieu, sauf si elle est volontairement introduite par le concepteur du système. Il en va de même pour le modus tollens.

Notons que des recherches se penchent actuellement sur le modus tollens flou, notamment pour l'élaboration de systèmes de raisonnement basés sur l'expérience ([Zhaohao Sun and Sun., 2005]).

2.4 Le langage naturel

L'être humain raisonne la plupart du temps sur des énoncés formulés en langage naturel. La logique classique ne peut pas conserver de manière satisfaisante les liens entre des propositions du type :

- “Ce lapin est petit”
- “Certains lapins sont petits”
- “Certains lapins sont très petits”
- “Certains lapins ne sont pas très petits”

Nous avons vu dans le premier chapitre que la logique floue se base sur le concept de variables linguistiques, ce qui permet d'introduire une très grande souplesse dans les caractérisations. Afin de mieux prendre en compte les propositions formulées en langage naturel, Zadeh a publié trois longs articles en 1975 pour étendre la notion de variables linguistiques [Zadeh, 1975a] [Zadeh, 1975b] [Zadeh, 1975c], qu'il a repris quelques années en 1978 dans [Zadeh, 1978] où il a posé les bases de la théorie PRUF (*Possibilistic Relational Universal Fuzzy Language*).

En particulier, au-delà des simples variables linguistiques, PRUF introduit quatre autres concepts linguistiques pouvant être modélisés en logique floue :

- les modificateurs. Exemple : “X est très loin” ;
- les quantificateurs. Exemple : “La plupart des Chinois ont les cheveux noirs” ;
- les qualificateurs. Exemple : “Il est probable qu’X soit loin” ;
- les opérateurs de composition. Exemple : “X est proche et Y est loin”. Les opérateurs de composition correspondent aux opérateurs et/ou, nous les avons déjà vus en première partie).

Par souci de concision, nos propos ayant ici pour but de montrer la flexibilité de la logique floue pour la formalisation du langage naturel par rapport aux logiques classique, nous allons que brièvement expliquer comment définir les modificateurs.

Les modificateur sont des adverbes qui modifient une variable floue afin d'intensifier ou de diminuer sa signification, tel “très”, “moyennement” ou encore “plutôt”. Par exemple, cela nous permet d'obtenir l'ensemble flou “très dynamique” à partir des ensembles flous “dynamique” et “très”.

Définition 10.

Un *modificateur linguistique* est un opérateur m caractérisé par une fonction t_m telle que si A un ensemble flou caractérisé par la fonction d'appartenance f_a , $m(A)$ est un ensemble flou caractérisé par $f_{m(A)}$, avec $f_{m(A)} = t_m(f(A))$.

Voici quelques exemples de modificateurs introduits initialement dans les articles de Zadeh :

- "très" : $t_m(x) = x^2$;
- "plus ou moins" : $t_m(x) = \sqrt{x}$;
- "non" : $t_m(x) = 1 - x$;

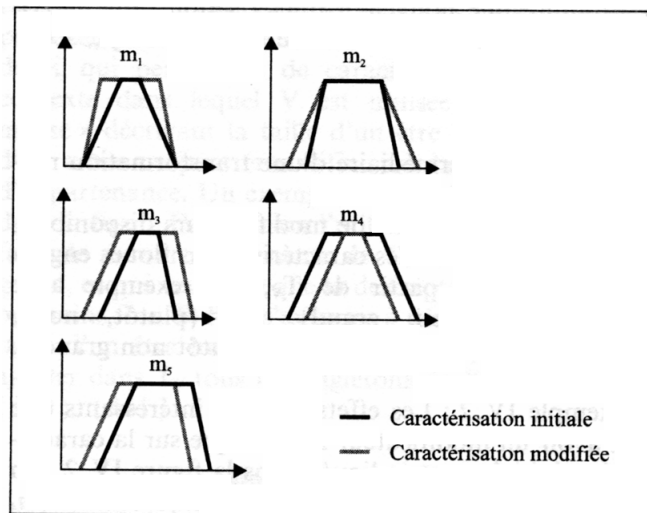


FIGURE 2.5: Effet des modificateurs

Une autre façon de définir un modificateur est de le représenter directement comme un ensemble flou [Ribeiro and Moreira, 2003], ce qui permet de manipuler le même type d'éléments dans le système flou :

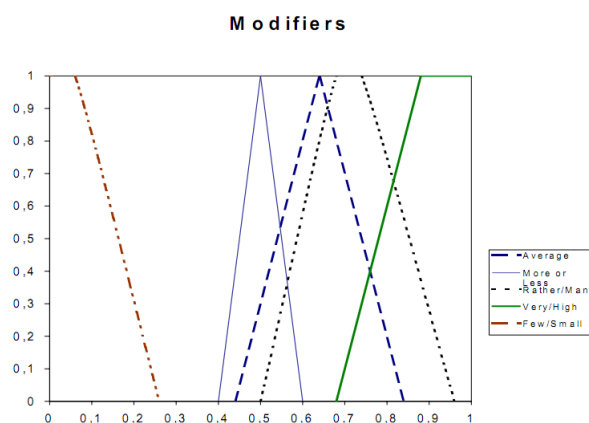


FIGURE 2.6: Fonctions d'appartenance de modificateurs

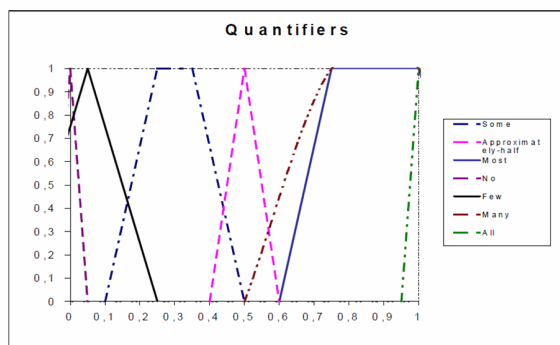


FIGURE 2.7: Fonctions d'appartenance de quantificateurs

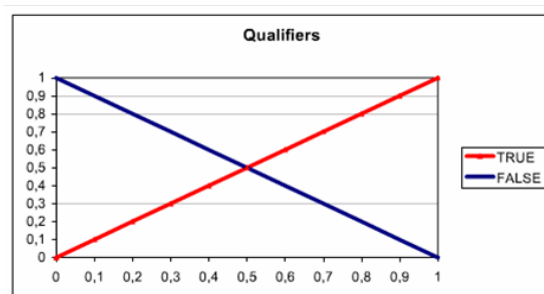


FIGURE 2.8: Fonctions d'appartenance de qualificateurs

2.5 Conclusions

L'objectif de ce chapitre était de voir quel était la "proximité" entre le raisonnement humain et la logique floue. Pour cela, nous avons étudié plusieurs facettes du raisonnement humain difficilement mobilisables et expérimentalement mis à mal en terme de probabilité et de logique classiques.

La logique floue semble apporter une réponse satisfaisante pour la non additivité des probabilités constatées chez les sujets humains. La logique floue permet également de répondre ou d'atténuer certains paradoxes apparaissant en logique classique. Néanmoins, il serait utile de creuser l'étude pour mieux analyser certains aspects de ces paradoxes en logique floue, notamment l'expression de la tâche de sélection de Wason.

Une force indéniable de la logique floue est sa proximité avec le langage naturel. Par essence, les règles de la matrice des décisions sont exprimées en langage naturelle,

et la base de logique floue repose sur la théorie des ensembles flous qui se prête très bien à exprimer les variables linguistiques.

La logique floue semble ainsi fournir un bon cadre théorique pour le raisonnement humain, tout du moins son imitation. Nous allons voir dans le chapitre suivant si expérimentalement nous pouvons retrouver des traces d'inférences floues dans les comportements de sujets humains dans le cadre de tâches de décision qui leur seront affectées.

Chapitre 3

Expériences

La vérité n'est pas l'exactitude. Henri Matisse.

3.1 Objectifs

Il n'existe malheureusement que peu d'études comparant les résultats des systèmes d'inférence basée sur la logique floue avec les résultats qui émanent des raisonnements humains. Dans ce chapitre, nous analyserons deux aspects du raisonnement humain à travers deux expériences.

Nous relaterons tout d'abord un article de recherche dans le domaine de l'informatique médicale dont les auteurs ont tenté de concevoir un système d'aide à la décision se fondant sur la logique floue pour aider les anesthésistes lors des opérations chirurgicales. La perspective sera alors l'étude du type d'inférences chez les humains lorsque l'on donne à ces derniers des variables objectives très précises et très certaines issues d'instruments de mesure médicaux.

Dans un second temps, nous ferons notre propre expérience dans le monde des jeux vidéo. Nous étudierons comment des gamers donnent des notes à des jeux vidéo en fonction de deux critères qu'ils évalueront eux-mêmes, contrairement à l'expérience précédente où l'évaluation de ces deux critères n'est pas fait par l'humain mais est donnée par une source externe.

3.2 Système d'aide à la décision pour anesthésistes

Dans l'étude [Hamdi Melih Saraoglu, 2007], les auteurs se sont penchés sur la prise de décision des anesthésistes au cours des opérations chirurgicales. Au cours de ces dernières, un anesthésiste décide du contenu du gaz que le patient respire continuellement : ce gaz doit être plus ou moins anesthésiant selon la condition du patient à l'instant donné de l'opération.

Pour prendre cette décision, l'anesthésiste se base sur 2 critères principaux (input) :

- SAP : systolic arterial pressure (tension artérielle) ;
- HRP : heart pulse rate (rythme cardiaque).

En fonction de ces 2 critères, l'anesthésiste prendra décision (output) :

- AO : Taux de produits anesthésiques dans le gaz (anesthesia output).

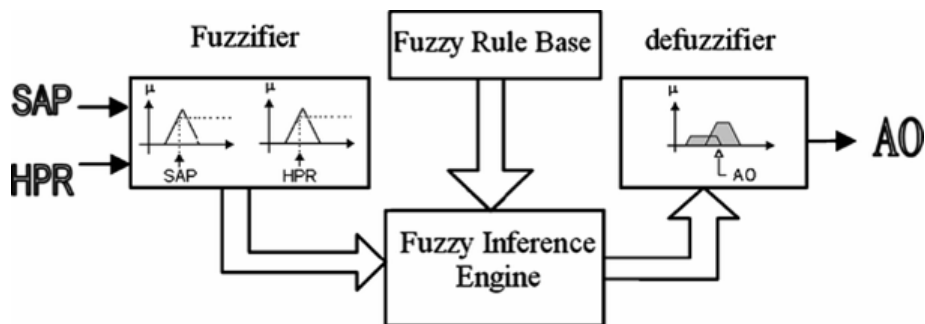


FIGURE 3.1: Vue d'ensemble du système d'inférences

Dans un premier temps, les auteurs de l'étude définissent le système flou artificiel, et dans un second temps le mettent en situation réelle afin de comparer ces résultats avec les décisions prises par les anesthésistes humains. Nous allons donc tout d'abord expliquer brièvement le système flou choisi.

Tout d'abord, voici les ensembles flous et la matrice de décision retenus :

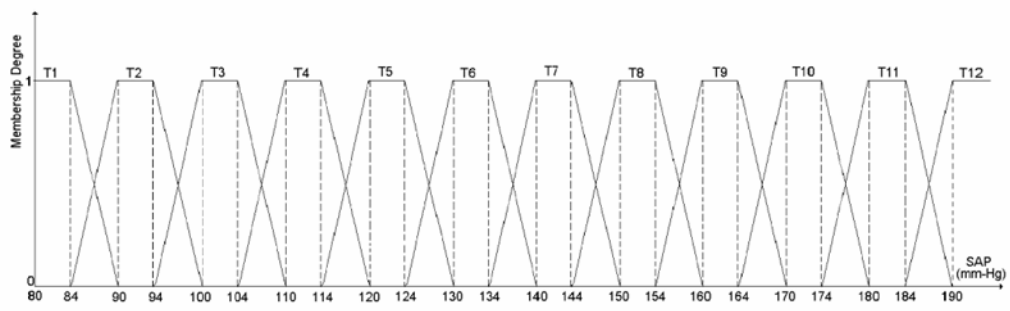


FIGURE 3.2: Ensembles flous de la variable SAP

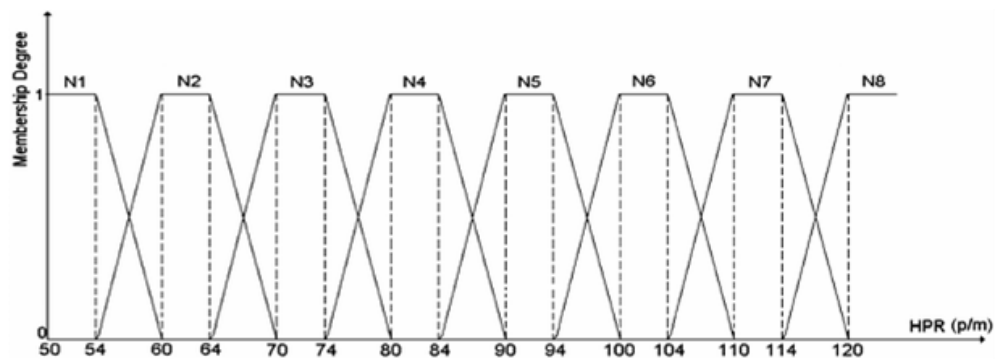


FIGURE 3.3: Ensembles flous de la variable HPR

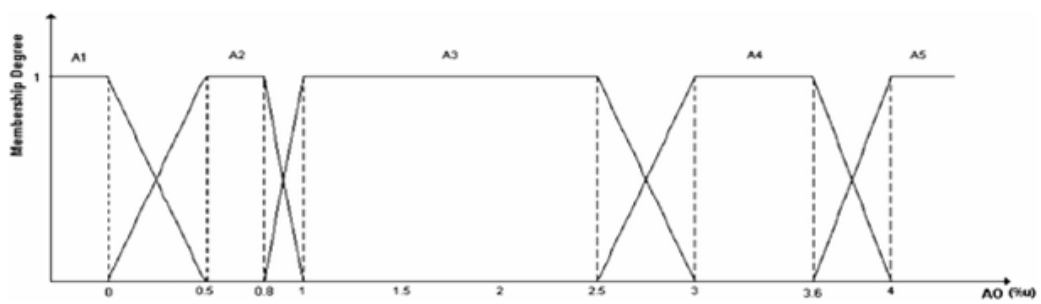


FIGURE 3.4: Ensembles flous de la variable AO

	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8
T1	A1	A1	A2	A2	A2	S	S	S
T2	A2	A2	A3	A3	A3	A4	A4	A4
T3	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4	A4
T4	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4	A4
T5	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4	A4
T6	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4	A4
T7	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4	A5
T8	S	A4	A4	A4	A4	A5	A5	A5
T9	S	A4	A4	A4	A4	A5	A5	A5
T10	S	A4	A4	A4	A4	A5	A5	A5
T11	S	A5	A5	A5	A5	A5	A5	A5
T12	S	A5	A5	A5	A5	A5	A5	A5

FIGURE 3.5: Matrice des décisions

Voici les choix des opérateurs flous ainsi qu'un exemple d'inférence. Ce choix classique utilisant les opérateurs de Zadeh ainsi que l'implication de Mamdani est appelé la méthode d'inférence de Mamdani.

Opérateur	Nom
ET	min
OU	max
Implication	min
Agrégation	max
Défuzzification	COG

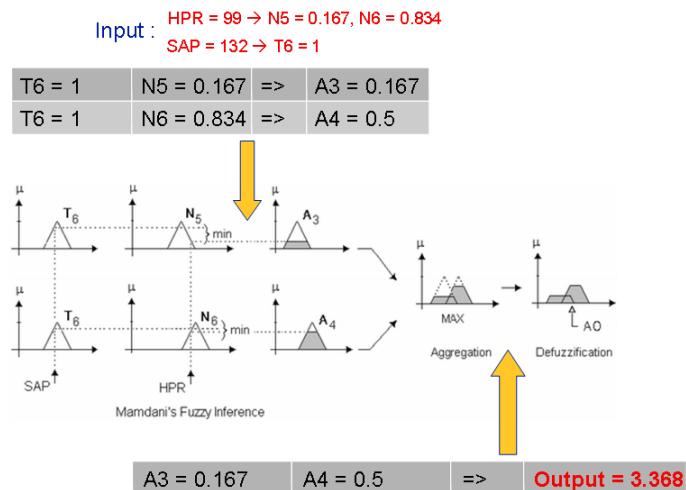


FIGURE 3.6: Exemple d'inférence

À présent que le système flou est établi, comparaisons le avec les décisions prises par les anesthésistes :

											Total		
Patient 1	SAP (mmHg)		164	161	192	156	172	161	152	157	154		
	HPR (p/m)		65	96	99	80	72	81	73	78	73		
	AO	Anesthetist		2	2.5	4	3	3.5	2.5	2.5	2.5	2.5	25
		Fuzzy Logic		3.25	3.29	3.88	2.18	3.27	3.27	1.83	2.38	1.83	25.2
	Distance %												+1
Patient 2	SAP (mmHg)		149	184	139	182	163	158	158				
	HPR (p/m)		88	94	98	74	78	90	87				
	AO	Anesthetist		2	4	2	5	4	2	2			21
		Fuzzy Logic		1.85	3.27	2.61	3.27	3.27	2.61	2.52			19.4
	Distance %												-7.6
Patient 3	SAP (mmHg)		110	130	130	110	130	120	120				
	HPR (p/m)		90	70	70	68	72	75	76				
	AO	Anesthetist		2.5	2	2	2	2	1.5	1			12
		Fuzzy Logic		1.83	1.83	1.83	1.85	1.83	1.84	1.85			11.1
	Distance %												-7.5
Patient 4	SAP (mmHg)		150	110	115	110	110						
	HPR (p/m)		96	74	107	95	90						
	AO	Anesthetist		3	2	2	2	2					11
		Fuzzy Logic		2.18	1.83	3.26	2.00	1.83					11.1
	Distance %												+1

FIGURE 3.7: Comparaison décisions d'un système flou et d'un humain

Ce tableau établit la comparaison entre les doses de produits anesthésiants données par l'anesthésiste et celles données par le système flou toutes les cinq minutes en fonction des variables HPR et SAP du patient. Quatre opérations de durées inégales sont comparées : l'opération du patient 1 a duré 45 minutes, celle des patients 2 et 3 35 minutes, et le patient 4 n'est resté sur la table d'opération que 25 minutes.

L'article, ainsi que le tableau précédent qui en est tiré, soulignent que la somme des doses de produits anesthésiants à la fin de l'opération est pratiquement similaire pour l'anesthésie est et pour le système flou : par exemple, pour la première opération, l'anesthésiste donne 25 d'AO, et le système flou 25,2, ce qui est pratiquement similaire. L'article en conclut que le système flou est performant pour imiter les décisions des anesthésistes.

Néanmoins, la comparaison de la somme uniquement n'est pas du tout satisfaisante. En effet, il pourrait très bien se produire que lors de la première décision la dose de produits anesthésiants à donner au patient soit létale, et que les doses suivantes soient quasiment nulles, ce qui donnerait une somme comparable à la somme d'une prescription faite par un anesthésiste.

Le coefficient de corrélation de Pearson permet d'avoir une meilleure idée quant à la correspondance entre résultats expérimentaux et les résultats théoriques. Sur l'ensemble des opérations, le coefficient de corrélation de Pearson est de 0,627, ce qui correspond à un agrément modéré, mais que l'on retrouve souvent dans les décisions médicales lorsque l'on analyse la différence de décision entre deux médecins [Caroff, 2010].

Un meilleur indicateur comparant les résultats expérimentaux avec les résultats du modèle est la racine carré de l'erreur quadratique moyenne (RMSE). En particulier, le RMSE nous permettra de comparer plusieurs modèles.

Définition 11.

$$\text{Soit } \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{2,n} \end{bmatrix}.$$

La racine carré de l'erreur quadratique moyenne est calculée par la formule :

$$\text{RMSE}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \sqrt{\text{MSE}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)} = \sqrt{\text{E}((\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)^2)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{1,i} - x_{2,i})^2}{n}}.$$

Sur l'ensemble des opérations, nous trouvons un RMSE égal à 0,6877. Cela nous permettra de comparer ces résultats avec l'expérience suivante.

3.3 Expérience de notations de jeux vidéo

3.3.1 Présentation

À présent, intéressons-nous au cas où l'humain prend une décision basée sur des critères dont il évalue lui-même leur valeur. Nous avons conçu pour ce rapport une expérience permettant d'étudier ce type de raisonnement.

En bref, l'expérience consiste en une notation de jeux vidéo par 7 sujets passionnés de jeux vidéo (*gamers*). Chacun notera une trentaine de jeux vidéos et 3 jours après, nous leur demanderons de noter deux critères regroupant la totalité des aspects d'un jeu vidéo. Nous étudierons alors la relation entre la note des deux critères avec la note globale, pour voir notamment si un système d'inférence basée sur la logique floue peut présenter une relation similaire.

3.3.2 Protocole

Chaque sujet aura le profil suivant : homme, entre 20 et 30 ans, gamer. L'expérience se déroulera en deux séances qui dureront approximativement 15 minutes chacune, séparées par trois jours. Tous les détails du protocole sont en annexe B.

Lors de la première séance, il leur sera demandé de noter une trentaine de jeux vidéo de leur choix sur une échelle de 0 à 100, une note élevée signifiant que le joueur apprécie le jeu.

Lors de la seconde séance, il leur sera demandé de noter toujours entre 0 et 100 deux critères regroupant la totalité des aspects d'un jeu vidéo. Voici les deux critères :

- Critère 1 : aspects techniques, comprenant les graphismes, la fluidité, la qualité de l'interface, la qualité des contrôles, le mode online et le nombre d'add-ons/extensions.
- Critère 2 : aspects non techniques, comprenant la durée de vie, le scénario, le plaisir de jouer, l'intérêt des stratégies, l'activité de la communauté et la possibilité d'apprentissage.

3.3.3 Résultats

Voici le graphique d'un sujet et le graphique pour l'ensemble des sujets. Un point bleu correspond à la notation d'un jeu vidéo. Nos données sont en trois dimensions :

1. Dimension 1 : Note aspects techniques
2. Dimension 2 : Note aspects non techniques

3. Dimension 2 : Note globale

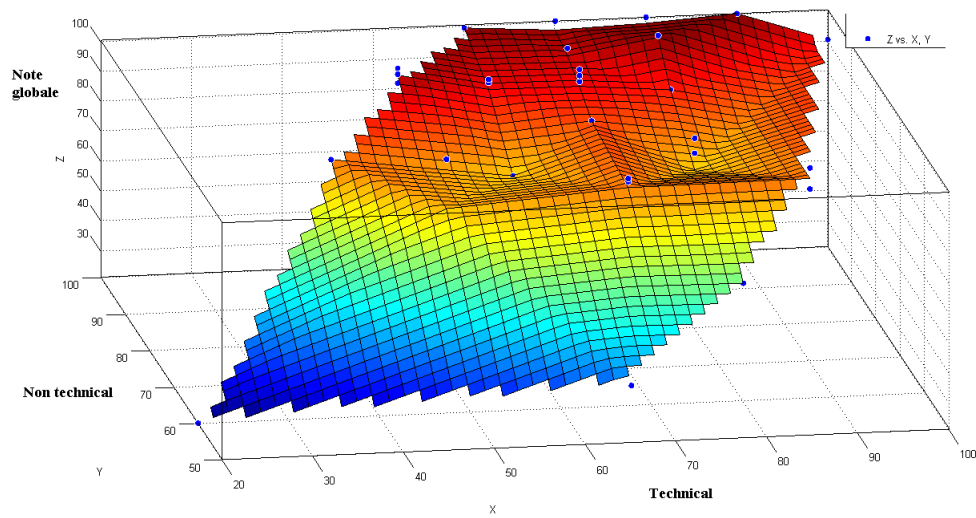


FIGURE 3.8: Surface générée à partir des notes du sujet 1 par rapport aux 2 critères

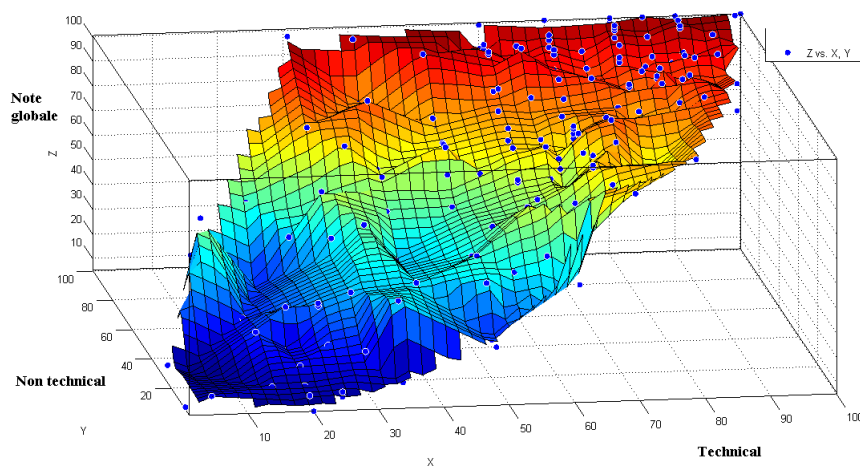


FIGURE 3.9: Surface générée à partir des notes de tous les sujets par rapport aux 2 critères

Nous allons comparer le RMSE obtenu avec un modèle de prédiction polynomial et celui obtenu avec un modèle se basant sur un système flou. Le modèle polynomial à un RMSE égale à 7,91 lorsque les degrés de X et Y est de 1, et descend à 6,097 lorsque X et Y ont un degré égal à 5.

Nous devons à présent établir un modèle se basant sur un système flou. Plus précisément, nous devons définir des ensembles flous ainsi que les règles floues de la matrice de décision. Le problème qui se pose est que si nous figurions le modèle à la main, nous n'aurions aucune assurance de son optimalité et par conséquent la comparaison de RMSE ne serait pas forcément pertinente. Afin d'optimiser le plus possible notre système flou, nous allons affiner nos paramètres via réseaux de neurones. Les systèmes ainsi conçu sont qualifiés de neuro-fuzzy.

3.3.4 Systèmes neuro-fuzzy

Les systèmes neuro-fuzzy furent introduits dans la thèse de Jyh-Shing Roger Jang en 1992 sous le nom de "Adaptative-Networks-based Fuzzy Inference Systems" (ANFIS) [Jangi, 1992]. Ils utilisent le formalisme des réseaux de neurones en exprimant la structure d'un système flou sous la forme d'un perceptron multicouches.

Un perceptron multicouches (MLP) est un réseau de neurones sans cycle. Nous présentons à la couche d'entrée (input layer) un vecteur et le réseau nous retourne un vecteur résultat dans la couche de sortie (output layer). Entre ces deux couches, les éléments du vecteur d'entrée sont pondérés par le poids des connexions et mélangés dans les neurones cachés qui se trouvent dans les couches cachées (hidden layer).

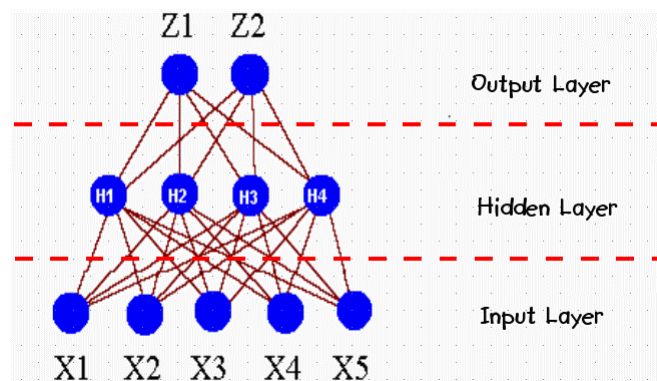


FIGURE 3.10: Exemple d'un réseau de neurones feedforward

Plusieurs fonctions d'activation pour la couche de sortie sont couramment utilisées, telles les fonctions linéaires, logistique ou encore softmax. De même, il existe plusieurs algorithmes de rétropropagation des erreurs permettant d'optimiser l'apprentissage des poids à partir des erreurs faites entre les valeurs calculées par le réseau et les

valeurs réelles : méthode du gradient conjugué (Conjugate gradients optimization), Scaled Conjugate Gradient, Quasi-Newton optimization, etc.

Voici comment est organisé notre perceptron multicouches représentant le système neuro-fuzzy qui nous servira à modéliser le système de notations :

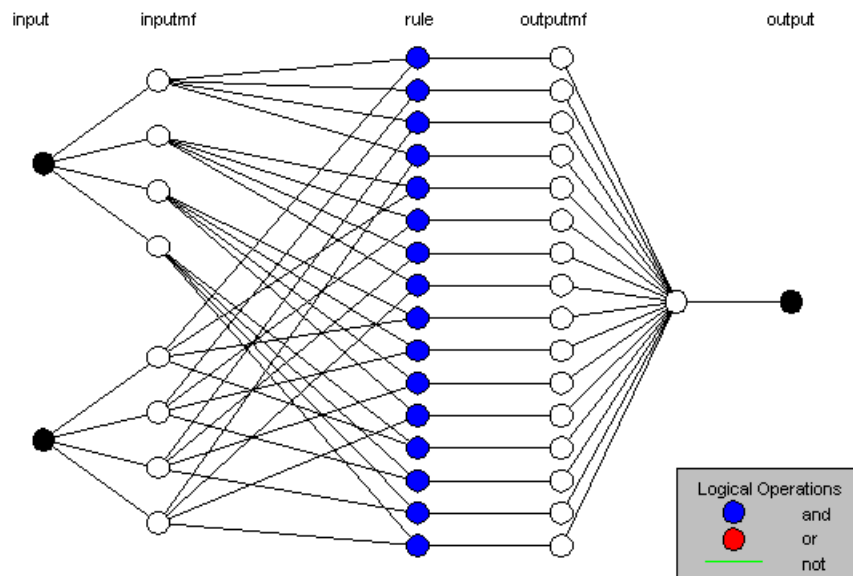


FIGURE 3.11: Structure d'un système neuro-fuzzy

Le domaine étant récent, nous avons dû prendre en compte plusieurs contraintes afin de pouvoir trouver un modèle pour notre expérience de notation de jeux vidéo. Nous avons dû fixer avant la phase d'apprentissage :

- le nombre d'ensembles flous des inputs : 4 par input ;
- la forme de leur fonction d'appartenance : gaussienne.

Voici la courbe d'apprentissage pour notre système flou :

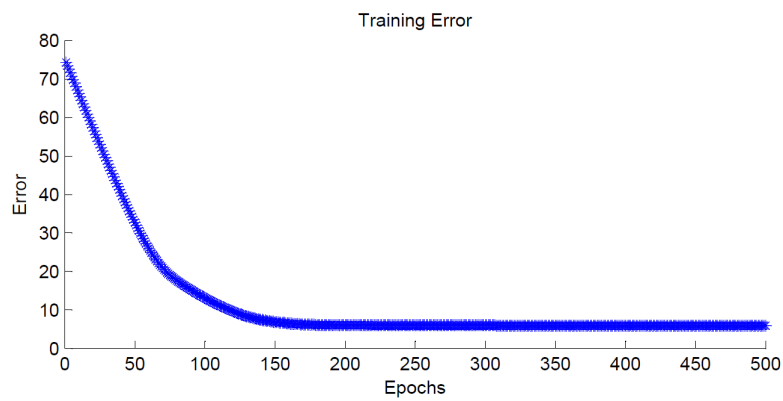


FIGURE 3.12: Courbe d'apprentissage du système neuro-fuzzy

Nous obtenons un RMSE de 5,9 au bout de quelques centaines de pas d'apprentissage, soit bien inférieur au RMSE d'un modèle polynomial de degré 1, et légèrement inférieur au RMSE d'un modèle polynomial de degré 5. Ce résultat est plutôt bon, voici la surface de décision obtenu :

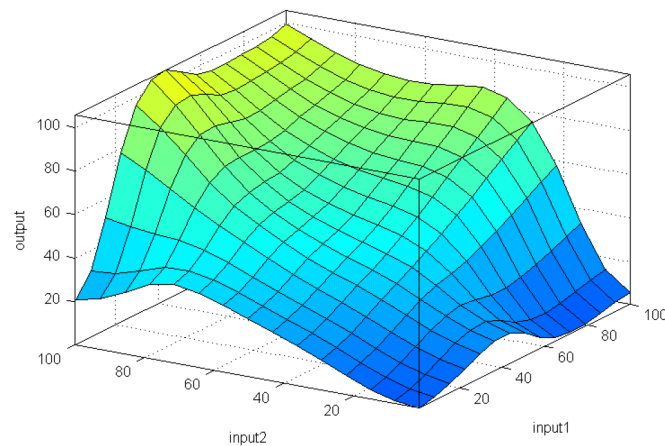


FIGURE 3.13: Surface de décision du système neuro-fuzzy

Nous remarquons que la surface de décision du système flou obtenu à une forme entre une surface linéaire et une surface de décision d'un système flou *classique*. Le coefficient de corrélation de Pearson entre nos deux inputs est de 0,786, ce qui signifie que les sujets ont eu tendance lors de la seconde étape de l'expérience à être influencés lorsqu'il notait l'aspect technique par la note non technique qu'il avait

donnée avant, ou vice-versa. Néanmoins, même dans ces conditions favorisant un modèle polynomial, le modèle flou a de meilleurs résultats.

Nous voyons que les données expérimentales sont proches du modèle théorique, à l'exception des deux zones extrêmes où la note donnée à l'aspect technique diffère beaucoup de la note donnée à l'aspect non technique, cas qui n'arrive jamais en pratique car si l'aspect technique du jeu est vraiment très mauvais, cela impacte négativement les aspects non techniques, et inversement si les aspects non techniques sont trop mauvais, le joueur arrête tout de suite de jouer avant qu'il ne puisse évaluer réellement le côté technique.

Regardons la matrice de décision de notre système flou optimisé par réseaux de neurones. Comme nous l'avons vu, nous avons fixé à quatre pour chacun des deux inputs. Soit :

- l'ensemble d'ensembles flous de l'input 1 : $\{in_1mf_i, i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket\}$;
- l'ensemble d'ensembles flous de l'input 2 : $\{in_2mf_i, i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket\}$;
- l'ensemble d'ensembles flous de l'output : $\{out_1mf_i, i \in \llbracket 1, 4 \times 4 \rrbracket\}$.

L'ensemble des règles floues de notre système est :

$\{Si\ in_1mf_i\ et\ in_2mf_j\ alors\ out_1mf_{4 \times (i-1) + j}, (i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2\}$ ce qui semble cognitivement plausible.

3.3.5 Comparaison avec l'expérience précédente

Pour l'expérience avec les anesthésistes, nous avons créé un modèle neuro-fuzzy pour voir si nous pouvions améliorer le système établi à la main dans l'article. Voici les décisions prises par notre système flou par rapport aux décisions de l'anesthésiste au cours des 4 opérations dont nous avons les données :

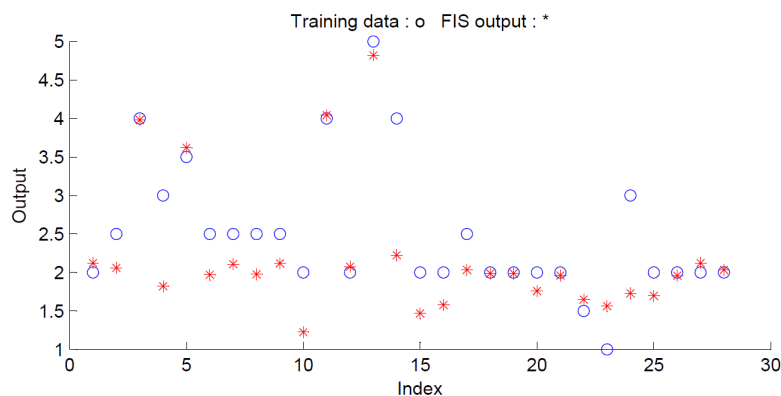


FIGURE 3.14: Surface de décision du système neuro-fuzzy

Voici le tableau récapitulatif des RMSE :

Expérience	Modèle	RMSE*	RMSE normalisé**
Anesthésiste	Système flou à la main	0,6877	13,754
Anesthésiste	Système neuro-fuzzy	0,569	11,38
Notation Jeux	Système polynomial degré 1	7,91	7,91
Notation Jeux	Système polynomial degré 5	6,097	6,097
Notation Jeux	Système neuro-fuzzy	5,9	5,9

* RMSE entre modèle et données expérimentales

** RMSE normalisé car le RMSE est influencé par l'échelle. Or, l'output de l'expérience avec les anesthésistes a des valeurs entre 0 et 5, alors l'output de l'expérience avec les notations a des valeurs entre 0 et 100. Par conséquent, nous normalisons le RMSE en multipliant par $\frac{100}{5} = 20$.

Nous voyons que pour l'expérience avec les anesthésistes, notre système flou a un RMSE légèrement meilleur que celui proposé dans l'article. Il faudrait cependant avoir davantage de données car l'article ne donne les données de seulement 4 opérations, ce qui nous donne que 28 individus dans la série statistique, soit un nombre très insuffisant pour optimiser utilement un système flou par réseaux de neurones. Voici deux surfaces de décision. La première est celle qui nous a permis d'obtenir un RMSE égale à 0,569 : nous voyons que la forme est plutôt correcte excepté pour les valeurs élevées de l'input2, ce qui reflète le manque de données à cet endroit. La seconde est un exemple de sur-apprentissage accru par un nombre d'ensembles flous excessifs, qui a un RMSE de 0,212.

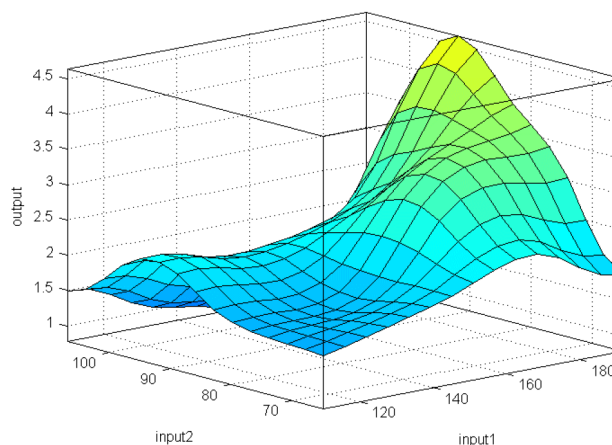


FIGURE 3.15: Surface de décision du système neuro-fuzzy

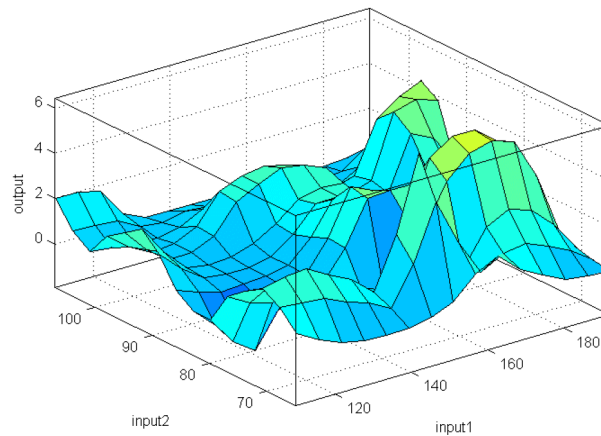


FIGURE 3.16: Surface de décision d'un système neuro-fuzzy ayant sur-appris

Pour comparer le RMSE entre les deux expériences, nous l'avons normalisé et nous voyons notre système flou pour l'expérience de notation de jeux a un RMSE (5,9) bien inférieure au système flou défini à la main pour les anesthésistes (13,754). Cela n'est guère étonnant du fait que le nombre de données dont l'expérience de notation est à peu près 10 fois plus important (267 contre 28), ce qui a permis aux réseaux de neurones de bien optimiser le système flou tout en rendant presque impossible le sur-apprentissage, car le nombre d'ensembles flous des inputs est limité.

Il est toutefois difficile de comparer le RMSE entre les deux expériences car dans la première les deux variables ne sont pas presque pas corrélées alors que dans la seconde elles le sont beaucoup.

3.4 Conclusions

En conclusion, les systèmes flous semblent être capables de générer des résultats assez semblables aux décisions issues du raisonnement humain. Clairement, ils sont meilleurs que les systèmes linéaires. En outre, les systèmes flous utilisés au cours de ces deux expériences, et en particulier pour la seconde, sont très simples : 2 inputs et 3 ou 4 ensembles flous pour chacun.

La logique floue permet donc dans ces exemple d'imiter en partie les raisonnements de l'humain, sous réserve d'avoir au préalable défini les différents paramètres du système d'inférences floues (fonction d'appartenance, choix de la règle d'implication, etc).

Chapitre 4

Conclusion

En conclusion, nous avons vu en première partie que la logique floue est née d'un besoin de formaliser les imprécisions. Malgré ses règles simples, elle est mathématiquement apte à modéliser des systèmes d'inférence beaucoup plus complexes que ne le permet la logique classique et les modèles linéaires. Sa matrice de décision qui rassemble les règles floues d'un système ressemble à la fois sur la forme (structure du type *Si X et Y alors Z*) et dans le fond (concept de variables linguistiques) au type de règles énoncées oralement par les êtres humains.

En outre, la logique floue permet d'expliquer beaucoup d'expériences qui avaient mis à mal les modèles classiques du raisonnement humain au cours du 20ème siècle. Nous avons montré comment la non additivité des jugements probabiliste peut être exprimée dans un système floue. Nous avons ensuite confronté la logique classique à certains paradoxes de la logique classique lorsque celle-ci tente de modéliser le raisonnement humain : la paradoxe des sorites est typiquement le genre de problème de seuil que la logique floue atténue et le paradoxe de l'implication ne pose pas de problème en logique floue. Il aurait été intéressant d'étudier plus en profondeur le paradoxe de Hempel et notamment comment nous pourrions l'exprimer au sein d'un système neuro-fuzzy. De même, la tâche de sélection de Wason mériterait une analyse plus poussée, cette fois-ci en se penchant sur les modus ponens et modus tollens flous. Au delà de ces paradoxes et de la non additivité, la logique floue, se basant sur le concept de variables linguistiques, est par essence proche de la langue naturelle.

La logique floue apparaît ainsi comme un cadre théorique puissant pour étudier le raisonnement humain. Étonnamment, nous n'avons trouvé qu'une seule étude comparant des décisions prises par des sujets humains avec celle d'un système flou, dont le

but était essentiellement de concevoir un système d'aide à la décision pour du personnel médical, et non analyser le raisonnement humain en tant que tel. Nous avons donc élaboré une expérience et étudié si un système flou pouvait imiter les résultats constatés chez les humains. Pour cela, nous avons utilisé une technique d'optimisation de système flou via réseaux de neurones (neuro-fuzzy), grâce à laquelle nous avons obtenu de bons résultats, bien que la corrélation entre les deux critères d'entrée soit élevée : un système flou donne des résultats plus proches des valeurs expérimentales que ceux obtenus par un système polynomial. Ce résultat renforce l'hypothèse selon laquelle la logique floue peut être utilisée pour expliquer les décisions issues du raisonnement humain.

Néanmoins, nous insistons sur le fait que ces expériences montrent au mieux que les systèmes flous peuvent **imiter** le raisonnement humain : seules les neurosciences pourraient montrer que ce mode de raisonnement existe réellement dans le cerveau humain. Sur ce sujet, certains articles de neurosciences tels [A., 2005] ou encore [Feng and Capranica, 1978] en 2008 commenté par David Olmsted sur le site <http://www.neurocomputing.org> tendent à montrer qu'il est plausible que les concepts de contrôle logique flou soient un moyen « biologiquement compatible ».

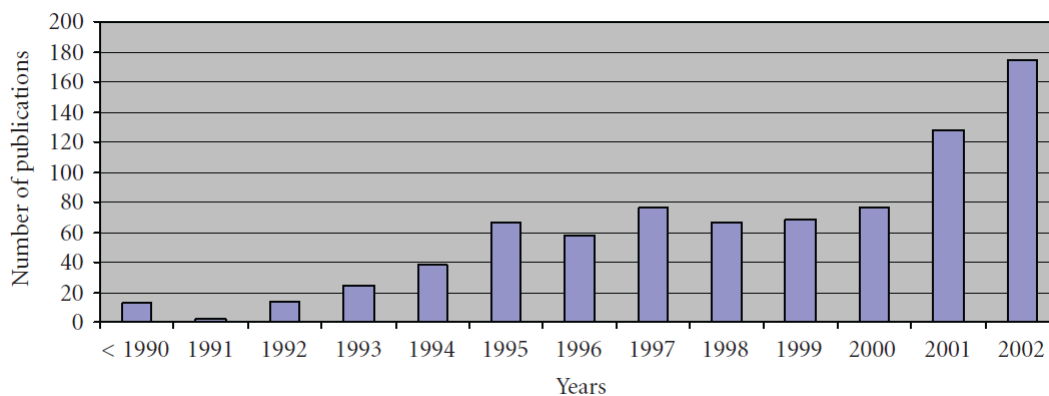


FIGURE 4.1: Nombre de publications par année indexées dans MEDLINE utilisant la logique floue. Source : [Torres A., 2005]

Comme le montre la figure 4.1, l'intérêt envers la logique floue est croissant : après s'être développée dans le monde industriel, cette théorie qui, au final, est très empirique, intéresse de plus en plus la médecine (aide à la décision) et l'ingénierie décisionnel (bases de données floues). La psychologie du raisonnement humain semble toutefois ne pas avoir beaucoup étudié ce domaine.

C'est là que se trouve le paradoxe : le versant informatique de l'intelligence artifi-

cielle s'est beaucoup intéressé à la logique floue car permettant de se lier au versant psychologique. Pourtant ce dernier ne semble pas s'y être tellement intéressé jusqu'à présent.

Bibliographie

- [A., 2005] A., P. (2005). The fuzzy logic of visuomotor control. *Canadian journal of physiology and pharmacology*, 74 :456–462. [cited at p. 42]
- [Boven and Epley, 2003] Boven, L. V. and Epley, N. (2003). The unpacking effect in evaluative judgments : When the whole is less than the sum of its parts. *Journal of Experimental Social Psychology*, 39(3) :263 – 269. [cited at p. 17]
- [Caroff, 2010] Caroff, J. (2010). *Comparaison de la qualité d'image et des doses d'irradiation délivrées en TDM cardiaque avec synchronisation à l'ECG en mode prospectif vs rétrospectif : utilisation de paramètres ajustés à l'IMC des patients*. PhD thesis, Université d'Angers. [cited at p. 32]
- [Cohen et al., 1956] Cohen, J., Dearnaley, E. J., and Hansel, C. E. M. (1956). The addition of subjective probabilities :the summation of estimates of success and failure. *Acta Psychologica*, 12 :371 – 380. [cited at p. 17]
- [Feng and Capranica, 1978] Feng, A. and Capranica, R. (1978). Sound localization in anurans. ii. binaural interaction in superior olivary nucleus of the green tree frog (*hyla cinerea*). *J. Comp. Physiol.*, 41 :43-5. [cited at p. 42]
- [Hamdi Melih Saraoglu, 2007] Hamdi Melih Saraoglu, S. S. (2007). A fuzzy logic-based decision support system on anesthetic depth control for helping anesthetists in surgeries. *Journal of Medical Systems*, 31 :511519. [cited at p. 28]
- [Jangi, 1992] Jangi, R. (1992). *Neuro-Fuzzy modeling : Architecture, Analysis and Application*. PhD thesis, University of California, Berkeley. [cited at p. 22, 35]
- [Leekwijck and Kerre, 1999] Leekwijck, W. V. and Kerre, E. E. (1999). Defuzzification : criteria and classification. *Fuzzy Sets and Systems*, 108(2) :159 – 178. [cited at p. 11]
- [Macchi, 1999] Macchi, L. (1999). A note on superadditive probability judgment. *Psychological Review*, 106. [cited at p. 17, 18, 20]
- [Madau D., 1996] Madau D., D. F. (1996). Influence value defuzzification method. *Fuzzy Systems, Proceedings of the Fifth IEEE International Conference*, 3 :1819 – 1824. [cited at p. 12]
- [Mélès, 1971] Mélès, J. (1971). *La gestion par les systèmes*. Editions Hommes et Technique. [cited at p. 2]

- [P. C. Wason, 1966] P. C. Wason, D. S. (1966). Natural and contrived experience in a reasoning problem. *New horizons in Psychology*. [cited at p. 22]
- [Redelmeier DA, 1995] Redelmeier DA, Koehler DJ, L. V. T. A. (1995). Probability judgement in medicine : discounting unspecified possibilities. *Med Decis Making*, Jul-Sep ;15(3) :227–30. [cited at p. 16]
- [Ribeiro and Moreira, 2003] Ribeiro, R. A. and Moreira, A. M. (2003). Fuzzy query interface for a business database. *Int. J. Hum.-Comput. Stud.*, 58 :363–391. [cited at p. 24]
- [Shafer G., 2005] Shafer G., V. V. (2005). The origins and legacy of kolmogorov's grundbegriffe. *The Game-Theoretic Probability and Finance Project*, Working Paper 4. [cited at p. 16]
- [Torres A., 2005] Torres A., N. J. J. (2005). Fuzzy logic in medicine and bioinformatics. *Journal of Biomedicine and Biotechnology*, 2005 :1–7. [cited at p. iv, 42]
- [Tversky and Koehler, 1994] Tversky, A. and Koehler, D. J. (1994). Support theory : A nonextensional representation of subjective probability. *Psychological Review*, 101(4) :547 – 567. [cited at p. 17]
- [Zadeh, 1965] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3) :338 – 353. [cited at p. 3]
- [Zadeh, 1975a] Zadeh, L. A. (1975a). The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning i. *Information Sciences*, 8 :199–249. [cited at p. 23]
- [Zadeh, 1975b] Zadeh, L. A. (1975b). The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning ii. *Information Sciences*, 8 :301–357. [cited at p. 23]
- [Zadeh, 1975c] Zadeh, L. A. (1975c). The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning iii. *Information Sciences*, 9 :43–80. [cited at p. 23]
- [Zadeh, 1978] Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1) :3 – 28. [cited at p. 23]
- [Zhaohao Sun and Sun., 2005] Zhaohao Sun, G. F. and Sun., J. (2005). Four new fuzzy inference rules for experience based reasoning. *IFSA World Congress*. [cited at p. 22]

Appendices

Annexe A

Expérience avec les anesthésistes

Voici le tableau de corrélation calculé sur SPSS :

		VAR00013	VAR00014
VAR00013	Pearson Correlation	1	,627
	Sig. (2-tailed)		,000
	N	28	28
VAR00014	Pearson Correlation	,627	1
	Sig. (2-tailed)	,000	
	N	28	28

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

FIGURE A.1: Matrice des corrélations entre décisions de l'anesthésiste et de décision du système flou

Le script permettant de l'obtenir est le suivant :

```
----- SCRIPT SPSS -----  
DATASET ACTIVATE DataSet0.  
CORRELATIONS  
/VARIABLES=VAR00013 VAR00014  
/PRINT=BOTH TWOTAIL NOSIG  
/MISSING=PAIRWISE.  
-----
```

Annexe B

Expérience de notation

Voici le détail de l'expérience de notation sur les jeux vidéo. Certains résultats et les scripts d'analyse seront placés également ici.

Lors de la première séance, il est demandé aux sujets de noter une trentaine de jeux vidéo de leur choix sur une échelle de 0 à 100, une note élevée signifiant que le joueur apprécie le jeu, sur le site web Wiki4Games (<http://www.wiki4games.com>). Ce site web est basé sur le moteur de wiki *MediaWiki*, et est utilisé par l'ensemble des projets de la Wikimedia Foundation, dont le site encyclopédique *Wikipédia*. Pour effectuer ces notations, ils utiliseront l'extension *W4G Rating Bar*, qui est une barre de vote permettant à chaque utilisateur enregistré sur le site de déposer une note. Le site Wiki4Games est administré par l'auteur de ce document, et l'extension *W4G Rating Bar* a été développé par lui pour le moteur MediaWiki (http://www.mediawiki.org/wiki/Extension:W4G_Rating_Bar). Cela permettra un total contrôle du processus de notation de l'expérience.

Lors de la seconde séance, il leur est demandé de noter deux critères regroupant la totalité des aspects d'un jeu vidéo sur une feuille Excel. Pour analyser les résultats, nous avons utilisé MATLAB et SPSS.

Nous avons utilisé en particulier deux outils de MATLAB :

- Le *Surface Fitting Tool* nous permet de générer une surface à partir des points 3D des données expérimentales.
- La *Fuzzy Logic Toolbox* (<http://www.mathworks.com/products/fuzzylogic/>) nous permet d'étudier les résultats que nous obtenons à partir d'un système d'inférence basé sur la logique floue.

Pour établir les graphiques des résultats des sujets, nous utiliserons le script sui-

vant, les données d'un sujet ayant été au préalable stockées dans un fichier `.mat`, ici `notesDavid.mat` :

```
----- SCRIPT MATLAB -----  
% load data  
load('notesDavid.mat', 'data')  
selectedNotes = data;  
X = selectedNotes(:, 1); % technical aspects  
Y = selectedNotes(:, 2); % non technical aspects  
Z = selectedNotes(:, 3); % global note  
  
% draw figure  
figure  
scatter3(X, Y, Z, 5, 'filled')  
  
% call the Surface Fitting Tool  
sftool(X, Y, Z)  
-----
```

Les pages suivantes montrent les résultats pour les sujets 1 et 2.

Les RMSE ont été calculés dans MATLAB grâce à la fonction `errperf` disponible sur <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/15130-error-related-performance-metrics>.

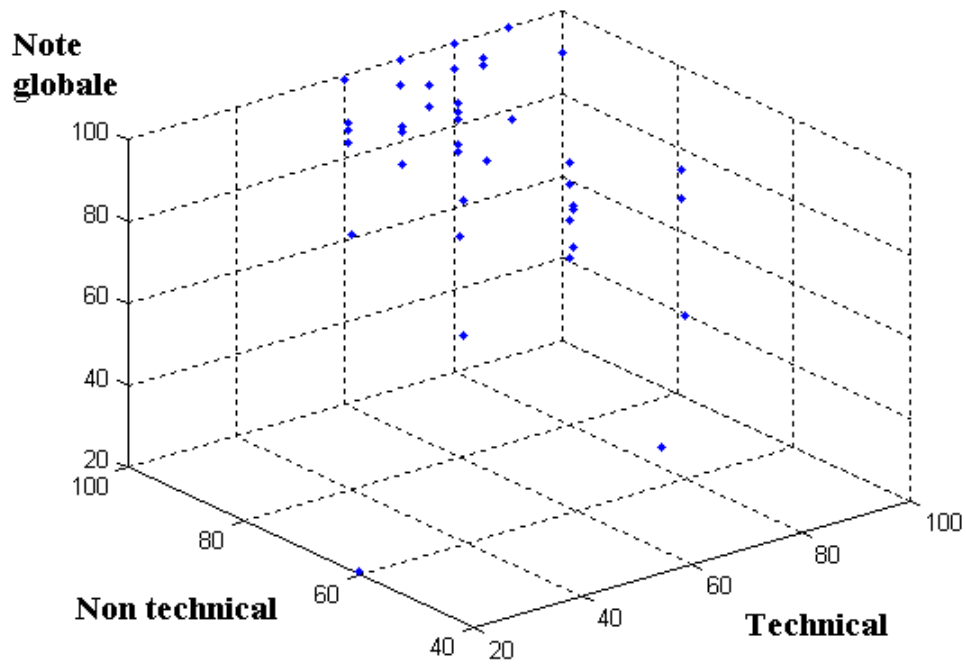


FIGURE B.1: Notes globales du sujet 1 par rapport aux 2 critères

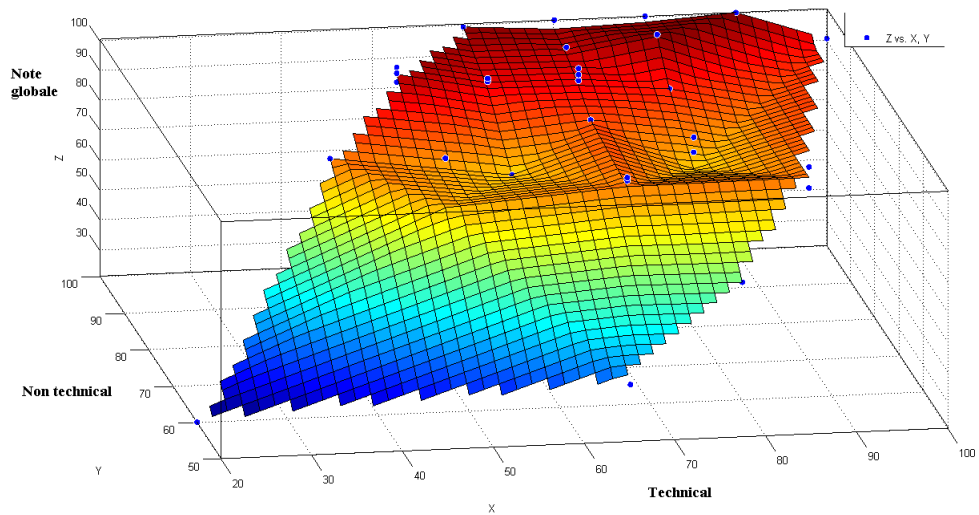


FIGURE B.2: Surface générée à partir des notes globales du sujet 1 par rapport aux 2 critères

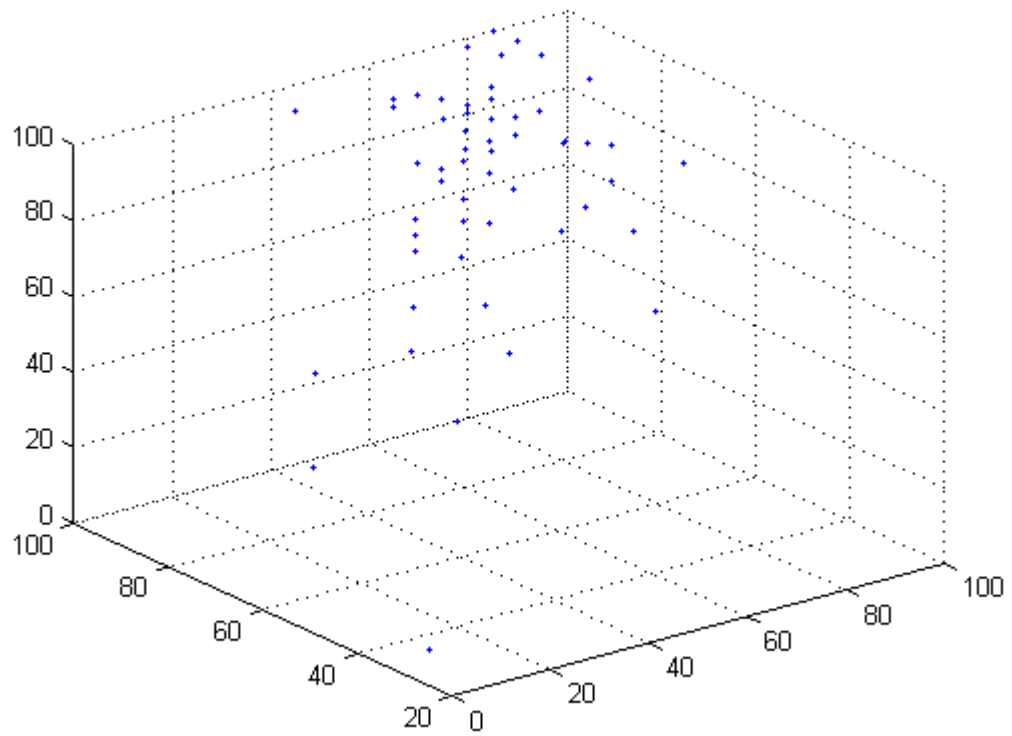


FIGURE B.3: Notes globales du sujet 2 par rapport aux 2 critères

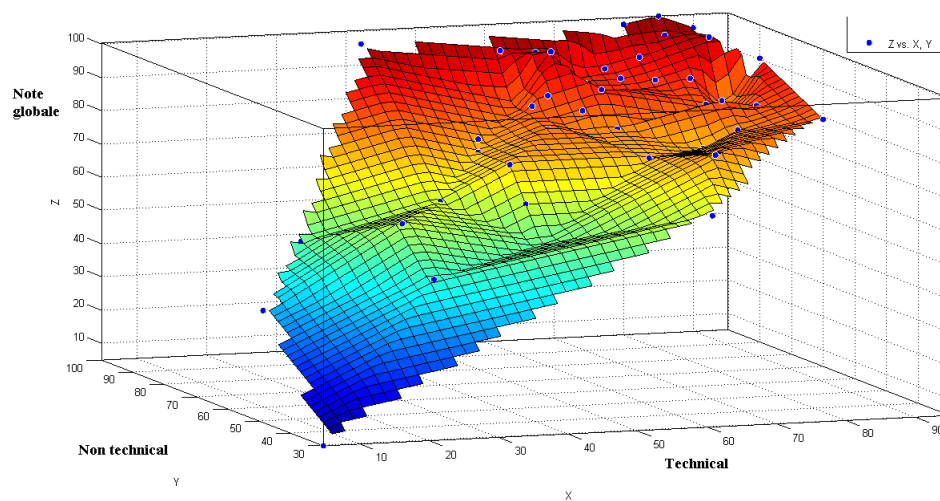


FIGURE B.4: Surface générée à partir des notes globales du sujet 2 par rapport aux 2 critères